

FAKULTA  
ELEKTROTECHNIKY  
A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ

# Řízení a regulace I

Základy regulace lineárních systémů - spojité a diskrétní

Ing. Petr BLAHA, PhD.  
Prof. Ing. Petr VAVŘÍN, DrSc.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod do automatického řízení</b>	<b>9</b>
1.1	Základní pojmy . . . . .	9
1.2	Systémy přímého a zpětnovazebního řízení (ovládání a regulace) . . . . .	11
1.3	Shrnutí . . . . .	13
1.4	Kontrolní otázky . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Stavový popis systémů</b>	<b>15</b>
2.1	Základní pojmy stavového popisu . . . . .	15
2.2	Vzájemný vztah mezi vnitřním a vnějším popisem . . . . .	20
2.3	Určení matice přenosových funkcí ze stavového popisu . . . . .	20
2.4	Přechod k jiným stavovým proměnným . . . . .	22
2.5	Určení stavového popisu z přenosu jednorozměrných systémů . . . . .	24
2.5.1	Přímé programování . . . . .	24
2.5.2	Paralelní programování . . . . .	25
2.5.3	Sériové programování . . . . .	26
2.6	Shrnutí . . . . .	28
2.7	Kontrolní otázky . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Regulované soustavy</b>	<b>31</b>
3.1	Přetlumené (nekmitavé) soustavy . . . . .	31
3.2	Kmitavé soustavy . . . . .	33
3.3	Soustavy s astatismem . . . . .	34
3.4	Soustavy s neminimální fází . . . . .	35
3.5	Identifikace regulovaných soustav . . . . .	35
3.6	Aproximace regulovaných soustav . . . . .	36
3.6.1	Aproximace dopravního zpoždění . . . . .	38
3.6.2	Využití programu Matlab . . . . .	40
3.7	Shrnutí . . . . .	41
3.8	Kontrolní otázky . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Regulátory</b>	<b>43</b>
4.1	Nejčastější přenosy spojitých regulátorů . . . . .	44
4.1.1	Realizace základních typů spojitých regulátorů . . . . .	47
4.2	Výkonové členy regulátorů . . . . .	48
4.3	Diskrétní regulátory . . . . .	53
4.4	Shrnutí . . . . .	54
4.5	Kontrolní otázky . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Základní typy přenosů ve spojitých zpětnovazebních obvodech a jejich vlastnosti</b>	<b>56</b>
5.1	Základní typy přenosů . . . . .	56
5.1.1	Přenos otevřené smyčky . . . . .	57
5.1.2	Přenos řízení . . . . .	58

5.1.3	Přenos poruchy . . . . .	58
5.1.4	Přenos odchyly . . . . .	59
5.1.5	Přenos akční veličiny . . . . .	60
5.2	Vlastnosti standardních spojitých přenosů . . . . .	60
5.2.1	Přenos otevřené smyčky . . . . .	61
5.2.2	Přenos řízení . . . . .	61
5.2.3	Přenos poruchy . . . . .	62
5.2.4	Přenos odchyly . . . . .	62
5.2.5	Přenos akční veličiny . . . . .	63
5.3	Ustálené odchyly v regulačních obvodech . . . . .	65
5.3.1	Tvar odchyly pro různé změny řízení . . . . .	65
5.3.2	Nulová ustálená odchyly bez integrační složky v regulačním obvodu . . . . .	67
5.3.3	Tvar odchyly pro různé změny poruchy . . . . .	68
5.4	Shrnutí . . . . .	69
5.5	Kontrolní otázky . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Stabilita obvodů se zpětnou vazbou</b>	<b>71</b>
6.1	Opakování znalostí o stabilitě lineárních dynamických systémů . . . . .	71
6.2	Stabilita ze známé charakteristické rovnice . . . . .	72
6.3	Nyquistovo kritérium stability . . . . .	74
6.3.1	Chauchyho teorém o fázi . . . . .	74
6.3.2	Odvození Nyquistova kritéria stability . . . . .	76
6.3.3	Nyquistovo kritérium pro $F(p)$ s póly v počátku . . . . .	80
6.3.4	Zjednodušené Nyquistovo kritérium . . . . .	85
6.3.5	Zjednodušené Nyquistovo kritérium v logaritmických souřadnicích . . . . .	87
6.4	Použití programu Matlab . . . . .	88
6.5	Shrnutí . . . . .	91
6.6	Kontrolní otázky . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Analýza dynamických vlastností regulačních obvodů</b>	<b>93</b>
7.1	Integrální kritéria kvality regulace . . . . .	93
7.1.1	Lineární integrální kritérium . . . . .	93
7.1.2	Kvadratické integrální kritérium . . . . .	95
7.1.3	ITAE kritérium . . . . .	103
7.1.4	Použití programu Matlab . . . . .	103
7.1.5	Kontrolní otázky . . . . .	106
7.2	Metoda kořenového hodografu . . . . .	106
7.2.1	Grafické určení hodnoty přenosu . . . . .	107
7.2.2	Soubor pravidel pro konstrukci kořenového hodografu . . . . .	108
7.2.3	Segmenty na reálné ose . . . . .	109
7.2.4	Počátky a konce větví . . . . .	109
7.2.5	Směr asymptot . . . . .	110
7.2.6	Střed asymptot . . . . .	111
7.2.7	Průsečík s reálnou osou . . . . .	113
7.2.8	Použití programu Matlab . . . . .	115

7.2.9	Kontrolní otázky . . . . .	115
7.2.10	Neřešené příklady . . . . .	116
7.3	Analýza pomocí frekvenčních charakteristik . . . . .	116
7.3.1	Zásoba stability v amplitudě . . . . .	117
7.3.2	Zásoba stability ve fázi . . . . .	117
7.3.3	Zásoba stability v modulu . . . . .	117
7.3.4	Zásoba stability ve zpoždění . . . . .	118
7.3.5	Zjišťování amplitudové a fázové bezpečnosti v Matlabu . . . . .	119
7.3.6	Zjištění frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky z průběhu $F(j\omega)$	121
7.3.7	Kontrolní otázky . . . . .	123
7.4	Shrnutí . . . . .	125
7.5	Kontrolní otázky . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Sytéza regulačních obvodů ve frekvenční oblasti</b>	<b>126</b>
8.1	Metoda standardního tvaru frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu .	126
8.1.1	Fázově neminimální systémy a systémy s dopravním zpožděním . .	132
8.1.2	Inverzní regulátor . . . . .	132
8.1.3	Vyregulování poruchy . . . . .	133
8.1.4	Regulátor se dvěma stupni volnosti . . . . .	134
8.1.5	Shrnutí . . . . .	135
8.2	Metoda optimálního modulu . . . . .	135
8.2.1	Shrnutí . . . . .	140
8.3	Metody optimálního časového průběhu . . . . .	140
8.4	Metoda Ziegler-Nicholsova . . . . .	141
8.4.1	Určení kritických parametrů z přechodové charakteristiky . . . . .	142
8.4.2	Určení kritických parametrů výpočtem ze známého modelu . . . . .	143
8.4.3	Rozkmitávání použitím relé bez hystereze . . . . .	143
8.4.4	Shrnutí . . . . .	143
8.5	Metoda požadovaného rozložení pólů uzavřeného obvodu . . . . .	144
8.6	Metoda standardních tvarů charakteristického polynomu . . . . .	148
8.7	Shrnutí . . . . .	150
8.8	Kontrolní otázky . . . . .	150
<b>9</b>	<b>Rozvětvené regulační obvody</b>	<b>151</b>
9.1	Regulační obvody s pomocnou regulovanou veličinou . . . . .	151
9.2	Regulační obvody s pomocnou akční veličinou . . . . .	154
9.3	Regulační obvody s měřením poruchy . . . . .	155
9.4	Regulační obvody s modelem regulované soustavy . . . . .	157
9.5	Shrnutí . . . . .	158
9.6	Kontrolní otázky . . . . .	159
<b>10</b>	<b>Syntéza regulačních obvodů se vzorkováním</b>	<b>160</b>
10.1	Návrh řídicího algoritmu podle požadovaných vlastností přenosu řízení . .	160
10.1.1	Fyzikální realizovatelnost řídicího členu . . . . .	161
10.1.2	Regulace na nulovou ustálenou odchylku . . . . .	161

10.1.3	Konečná doba trvání přechodného děje . . . . .	162
10.1.4	Stabilita obvodu se soustavou, jejíž diskrétní přenos obsahuje nuly a póly mimo jednotkovou kružnici v rovině . . . . .	165
10.1.5	Další požadavky na regulační pochod . . . . .	173
10.2	Návrh řídicího algoritmu podle požadavků na přenos poruchy . . . . .	176
10.2.1	Fyzikální realizovatelnost regulátoru . . . . .	177
10.2.2	Nulová odchylka v ustáleném stavu . . . . .	178
10.2.3	Konečná doba trvání přechodného děje . . . . .	178
10.3	Regulační obvody se dvěma korekčními členy . . . . .	181
10.4	Návrh řídicího algoritmu s omezeným počtem členů. Regulátory typu P, S, PS, PD a PSD . . . . .	182
10.4.1	Zjednodušení přenosu soustavy . . . . .	183
10.4.2	Zjednodušení navrženého regulátoru . . . . .	183
10.4.3	Návrh spojitého regulátoru a jeho převod na číslicový . . . . .	189
10.5	Shrnutí . . . . .	193
10.6	Kontrolní otázky . . . . .	193
<b>11</b>	<b>Vícerozměrné regulační obvody</b>	<b>194</b>
11.1	Řízení vícerozměrných obvodů . . . . .	197
11.2	Shrnutí . . . . .	199
11.3	Kontrolní otázky . . . . .	199
<b>A</b>	<b>Odpovědi na kontrolní otázky</b>	<b>200</b>
<b>B</b>	<b>Základy z maticového počtu a zpracování signálů</b>	<b>201</b>
B.1	Algebraický doplněk . . . . .	201
B.2	Adjungovaná matice . . . . .	201
B.3	Inverzní matice . . . . .	202
B.4	Vlastní čísla matice . . . . .	203
B.5	Masonovo pravidlo pro určení přenosu . . . . .	204
B.5.1	Převod blokového diagramu na graf signálových toků . . . . .	204
B.5.2	Základní pojmy . . . . .	204
B.5.3	Masonovo pravidlo pro výpočet přenosu . . . . .	206
B.6	Laplaceova transformace . . . . .	207
B.7	Inverzní Laplaceova transformace . . . . .	207
B.8	Fourierova transformace . . . . .	209

## Seznam obrázků

1.1	Schéma ovládání . . . . .	12
1.2	Schéma regulace . . . . .	12
1.3	Podrobné schéma regulace . . . . .	13
2.1	Obecný lineární systém . . . . .	15
2.2	Obecné stavové schéma systému . . . . .	18
2.3	Jednoduché elektrické schéma . . . . .	18
2.4	Stavový diagram přímého programování . . . . .	26
2.5	Stavový diagram paralelního programování . . . . .	27
2.6	Stavový diagram sériového programování . . . . .	27
2.7	Příklad přímého programování . . . . .	28
2.8	Příklad sériového programování . . . . .	29
2.9	Stavový diagram příkladu na paralelního programování . . . . .	29
3.1	Přechodové charakteristiky pro systémy prvního až pátého řádu . . . . .	31
3.2	Proces diskretizace spojitě soustavy . . . . .	32
3.3	Impulsní odezva výrazně kmitavé soustavy . . . . .	33
3.4	Impulsní odezva kmitavého systému s reálným dominantním pólem . . . . .	34
3.5	Parametry přechodové charakteristiky . . . . .	37
3.6	Přechodová charakteristika Padého aproximace 4. řádu . . . . .	39
3.7	Přechodová charakteristika systému 2. řádu s dopravním zpožděním realizovaným Padého aproximací . . . . .	39
4.1	Regulační obvody se dvěma stupni volnosti . . . . .	44
4.2	Obecné schéma zapojení s operačním zesilovačem . . . . .	48
4.3	Přechodové charakteristiky jednotlivých typů regulátorů P, I, PD, PI, PID, reálný PD a reálný PID regulátor . . . . .	49
4.4	Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině jednotlivých typů regulátorů P, I, PD, PI, PID, reálný PD a reálný PID regulátor . . . . .	50
4.5	Amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky jednotlivých typů regulátorů P, I, PD, PI, PID, reálný PD a reálný PID regulátor . . . . .	51
4.6	Regulační obvod se servomechanismem . . . . .	52
4.7	Regulační obvod s diskrétním regulátorem . . . . .	53
4.8	Blokové schéma tvorby programu počítače . . . . .	54
4.9	Úspornější blokové schéma tvorby programu počítače . . . . .	55
5.1	Zjednodušené technologické schéma . . . . .	56
5.2	Zobrazení otevřené smyčky . . . . .	58
5.3	Přenos řízení . . . . .	58
5.4	Přenos poruchy . . . . .	59
5.5	Přenos odchylky . . . . .	60
5.6	Přenos Akční veličiny . . . . .	60
5.7	Možnosti zajištění nulové ustálené odchylky na skok řízení pro $r + s = 0$ . . . . .	68
6.1	Mapování křivky $\Gamma$ do roviny $F$ . . . . .	74
6.2	Vliv kořenů $F(p)$ na změnu fáze uzavřené křivky $\Gamma$ . . . . .	75
6.3	Nyquistova křivka . . . . .	76

6.4	Frekvenční charakteristika k příkladu 6.2 . . . . .	78
6.5	Frekvenční charakteristika k příkladu 6.3 . . . . .	79
6.6	Směr obcházení počátku . . . . .	81
6.7	Směr obcházení kořenů na imaginární ose . . . . .	81
6.8	Frekvenční charakteristika k příkladu 6.4 . . . . .	82
6.9	Frekvenční charakteristika k příkladu 6.5 . . . . .	83
6.10	Frekvenční charakteristika k příkladu 6.6 . . . . .	84
6.11	Ukázka podmíněně stabilního systému . . . . .	86
6.12	Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině a logaritmických souřadnicích a jejich souvislost z hlediska stability podle zjednodušeného Nyquistova kritéria . . . . .	87
6.13	Test stability Nyquistovým kritériem v logaritmických souřadnicích . . . . .	89
6.14	Demonstrace příkazu <code>nyquist</code> v Matlabu . . . . .	91
7.1	Lineární regulační plocha . . . . .	94
7.2	Usměrněná lineární plocha . . . . .	94
7.3	Hodnota kvadratického kritéria . . . . .	95
7.4	Kvadratická integrální plocha . . . . .	97
7.5	Hodnota ITAE kritéria . . . . .	103
7.6	Blokové schéma vyhodnocující ITAE kritérium . . . . .	104
7.7	Simulinkovské schéma pro vyhodnocení ITAE kritéria . . . . .	104
7.8	Průběhy výstupu pro různé hodnoty zesílení $K$ . . . . .	105
7.9	Regulační schéma použité pro odvození metody GMK . . . . .	107
7.10	Výpočet přenosu v bodě $p$ . . . . .	108
7.11	Příspěvek k úhlu v testovacím bodě na reálné ose . . . . .	110
7.12	Příklad demonstrující počátek a konec větví kořenového hodografu . . . . .	110
7.13	Výpočet přenosu v bodě vzdáleném od všech nul a pólů . . . . .	111
7.14	Obrázek k příkladu 7.9 . . . . .	114
7.15	Okno po spuštění <code>rltool</code> -u . . . . .	116
7.16	Vysvětlení pojmů . . . . .	118
7.17	Zajímavé příklady . . . . .	119
7.18	Výsledek příkazu <code>margin</code> . . . . .	120
7.19	M-kružnice a N-kružnice . . . . .	123
7.20	Vztah mezi fázovou bezpečností a velikostí překmitu . . . . .	124
7.21	Vztah mezi délkou úseku se sklonem 20dB/dek kolem $\omega$ a velikostí překmitu . . . . .	124
8.1	Návrh P a PD regulátoru pro astatickou soustavu k příkladu 8.1 . . . . .	129
8.2	Návrh PI a PID regulátoru pro astatickou soustavu k příkladu 8.2 . . . . .	131
8.3	Výšece v rovině $p$ odpovídající různým hodnotám tlumení . . . . .	144
8.4	Kořenový hodograf s P regulátorem . . . . .	145
8.5	Kořenový hodograf s PD regulátorem . . . . .	146
8.6	Kořenový hodograf pro soustavu s PID regulátorem navrženým metodou standardních tvarů frekvenčních charakteristik . . . . .	147
8.7	Kořenový hodograf pro soustavu s PID regulátorem navrženým metodou optimálního modulu . . . . .	147

8.8	Kořenový hodograp pro soustavu s PID regulátorem navrženým metodou Zieglera-Nicholse . . . . .	148
9.1	Schéma regulačního obvodu s pomocnou regulovanou veličinou . . . . .	151
9.2	Řízení teploty v obvodu s pomocnou regulovanou veličinou . . . . .	152
9.3	Schéma rozvětvené struktury servomechanismu . . . . .	153
9.4	Schéma regulačního obvodu s pomocnou akční veličinou . . . . .	154
9.5	Řízení teploty v obvodu s pomocnou akční veličinou . . . . .	155
9.6	Schéma regulačního obvodu s měřením poruchy . . . . .	156
9.7	Schéma regulačního obvodu s modelem regulované soustavy . . . . .	157
9.8	Schéma regulačního obvodu kompenzujícího dopravní zpoždění . . . . .	158
10.1	Odezvy na skokovou změnu žádané hodnoty pro obvody navržené na různé průběhy řídicí veličiny (konstantní, lineárně narůstající a s konstantním zrychlením) . . . . .	163
10.2	Konečný přechodný děj v a mezi okamžiky vzorkování . . . . .	163
10.3	Regulační obvod s diskrétním regulátorem . . . . .	164
10.4	Obrázek k příkladu . . . . .	167
10.5	Obrázek k příkladu . . . . .	169
10.6	Obrázek k příkladu . . . . .	171
10.7	Grafické znázornění realizace . . . . .	172
10.8	Obrázek k příkladu . . . . .	173
10.9	Obrázek k příkladu . . . . .	174
10.10	Regulační obvod s omezením akčního zásahu . . . . .	175
10.11	Regulační obvod s různými periodami vzorkování . . . . .	176
10.12	Regulační obvod s poruchou na vstupu soustavy . . . . .	177
10.13	Regulační obvod se vzorkovanou poruchou . . . . .	177
10.14	Obrázek k příkladu . . . . .	180
10.15	Diskrétní regulační obvod se dvěma stupni volnosti . . . . .	182
10.16	Grafické znázornění realizace . . . . .	183
10.17	PSD regulátor . . . . .	185
10.18	Impulsové charakteristiky regulátorů $D(z)$ (plnou čarou), $D(z)$ (čárkovanou čarou) a PS (tečkovaně) . . . . .	187
10.19	Odezva na skokovou změnu řízení při použití PS regulátoru . . . . .	188
10.20	Obrázek k příkladu . . . . .	189
10.21	Odezva na skokovou změnu řízení při použití PD regulátoru ve srovnání s původním regulátorem $D_1(z)$ . . . . .	190
10.22	Vysvětlení aproximace vzorkovače s tvarovačem pomocí dopravního zpoždění	190
10.23	Náhrada vzorkovacího členu s tvarovačem dopravním zpožděním . . . . .	191
10.24	Odezvy regulačních obvodů na jednotkový skok řízení . . . . .	192
10.25	Impulsové charakteristiky regulátorů . . . . .	192
11.1	Vícerozměrová regulovaná soustava . . . . .	194
11.2	Blokové schéma vícerozměrového regulačního obvodu . . . . .	196
B.1	Prvky grafu signálových toků . . . . .	204
B.2	Blokový diagram . . . . .	206
B.3	Graf signálových toků získaný z blokového diagramu . . . . .	207



## Seznam tabulek

3.1	Řád a velikost časové konstanty . . . . .	38
5.1	Tabulka chování základních tvarů přenosů na jednotkový skok . . . . .	64
5.2	Ustálená odchylka pro různé typy průběhů žádané hodnoty a typu regulačního obvodu . . . . .	66
5.3	Ustálená odchylka pro různé typy průběhů poruchy a regulačního obvodu . . . . .	69
7.1	Doporučené hodnoty parametrů pro zásobu stability . . . . .	119
8.1	Vzorce pro výpočet regulátorů metodou optimálního modulu pro soustavy se stejnými časovými konstantami . . . . .	139
8.2	Vzorce pro návrh parametrů regulátoru metodou Ziegler-Nicholse . . . . .	142
8.3	Whiteley-ho tvary charakteristických polynomů v bezrozměrném tvaru . . . . .	148
10.1	Srovnání hodnot jednotlivých signálů . . . . .	176
10.2	Diskrétní ekvivalenty spojitých PID regulátorů . . . . .	186
B.1	Vztah mezi jednoduchými blokovými schématy a signálovými diagramy . . . . .	205

# 1 Úvod do automatického řízení

*Cílem úvodní kapitoly je vysvětlení základních pojmů, které se používají v automatizační technice. Bude zde vysvětlen rozdíl mezi ovládním a řízením. Řízení, jinými slovy regulace v uzavřené smyčce, bude hlavní náplní tohoto skriptu.*

## 1.1 Základní pojmy

Řízení je každé cílevědomé působení na řízený objekt, s cílem dosáhnout předem daného stavu. Pokud takové řízení probíhá automaticky, mluvíme o automatickém řízení.

Automatické řízení se v technické praxi vyskytuje ve dvou hlavních formách:

1. **Sekvenční řízení**, kdy řízený systém přechází postupně z jednoho stavu do druhého (dalšího). K přechodu obvykle dochází tehdy, jsou-li splněny určité podmínky. Typickým příkladem je start nebo ukončení nějakého technologického procesu. Kopírka typu xerox je připravena k práci teprve po nahřátí válce; při vypnutí projektoru zhasne lampa ale větrák běží ještě určitou dobu aby nedošlo k přehřátí zbytkovým teplem. Sekvenční automatiky průmyslových celků (npř. energetického bloku) jsou ovšem mnohonásobně složitější a počet stavů, kterými zařízení projde, může jít do desítek tisíců.
2. **Řízení dynamických systémů**. V tomto případě je cílem řízení aby daná výstupní (regulovaná) veličina co nejpřesněji sledovala časový průběh dané řídicí (žádané, vstupní) veličiny a to bez ohledu na signálové i parametrické poruchy, které na řízenou soustavu mohou působit. Regulátor, který generuje akční veličinu, působící na soustavu, musí tedy plnit dvě úlohy: - zajistit věrné sledování řízení, což je obtížné vzhledem k časovým zpožděním (obecně vzhledem k dynamickým vlastnostem) řízeného objektu; - kompenzovat poruchy, které mohou na řízený objekt působit tak, aby se jejich vliv na regulovanou veličinu projevil v co nejmenší míře.

V tomto skriptu se budeme věnovat řízení dynamických systémů, bez ohledu na to, půjde-li o systémy technické, ekonomické či společenské nebo jiné. Důležité je, zda rovnice, popisující vlastnosti řízeného systému mají stejný tvar. Pokud ano, budou odvozené algoritmy řízení platit, ať je fyzická podstata systému jakákoliv.

Regulované soustavy (systémy, objekty) mohou mít jeden vstup a jeden výstup. V tom případě je označujeme názvem SISO-systémy (z anglického Single Input-Single Output). Pokud mají více vstupů a více výstupů, mluvíme o MIMO systémech (Multi Input-Multi Output).

V systémech automatického řízení se vyskytují tyto základní veličiny (proměnné):

- **regulovaná veličina** je výstupní veličina řízeného systému (obvyklé značení je  $y$ )
- **řídicí veličina**, též žádaná hodnota nebo vstupní veličina; hodnota a časový průběh této proměnné určuje jaká má být hodnota a časový průběh regulované veličiny (obvykle se značí  $w$ )

- **regulační odchylka** je rozdíl mezi žádanou hodnotou a regulovanou veličinou (obvykle se značí  $e$ , a platí  $e = w - y$ )
- **akční veličina**, též regulační veličina, je vstupní veličina regulované soustavy a výstupní veličina regulátoru; obvykle ji značíme  $u$  (někdy také  $x$ )
- **porucha** je veličina, která působí buď na vstupu, výstupu nebo na libovolném místě regulované soustavy. V praxi může na jednu soustavu působit několik poruch v různých místech. (V rámci tohoto kurzu budeme uvažovat pouze signálové poruchy, parametrické poruchy, čili změny vlastností regulované soustavy budou probírány později). Signálové poruchy obvykle značíme  $v$ .

Regulované soustavy mohou mít stálé (časově neproměnné, neboli invariantní) vlastnosti, nebo se jejich vlastnosti mohou v čase měnit. V tomto kurzu se budeme převážně zabývat časově neproměnnými soustavami.

Procesy, probíhající v regulovaných soustavách mohou být popsány buď lineárními, nebo nelineárními rovnicemi. Připomeňme, že lineární je takový systém, u kterého platí následující dvě tvrzení (věty o linearitě):

**násobení konstantou** - jestliže odezva systému na vstupní signál  $u(t)$  je  $y(t)$ , pak lineární systém odpoví na vstup  $ku(t)$ , kde  $k$  je konstanta, odezvou  $ky(t)$

**princip superpozice** - jestliže odezva systému na vstup  $u_i(t)$  je  $y_i(t)$ , pak pro odezvu lineárního systému na signál  $u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t)$  platí  $y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$ .

V reálném světě je jen velmi málo systémů, které jsou skutečně lineární. Řada reálných systémů se však - zejména v okolí pracovních bodů - od lineárních systémů odlišuje jen málo a proto je lze s určitou mírou nepřesnosti za lineární považovat. Vzhledem k tomu, že popis i řešení problémů s lineárními systémy je nesrovnatelně jednodušší než v případě systémů s nelinearitami, omezíme se v tomto základním kurzu na lineární systémy. Při praktické realizaci provedeme nejprve tzv. linearizaci systému, při které nahradíme skutečný systém jeho modelem, který v okolí pracovního bodu s dostatečnou přesností nahradí původně nelineární vztahy lineárními rovnicemi. Linearizovat lze obvykle systémy s tzv. **parazitními nelinearitami**, které se v systémech vyskytují z důvodu konstrukčních (nasycení, omezení, pásmo necitlivosti, vůle v ozubených převodech, hystereze magnetických materiálů apod). Kromě těchto nelinearit se však v systémech automatického řízení vyskytují i tzv. **podstatné nelinearity**, často zaváděné úmyslně, které linearizovat obvykle nelze (to se týká zejména prvků s reléovou charakteristikou, které mají pouze dvou nebo tří hodnotový výstup). Nelineární systémy budou náplní dalšího kurzu.

Proces řízení může být realizován různým způsobem a podle toho se systémy řízení rozdělují do několika skupin, z nichž některé jsou považovány za standardní. Rozlišujeme regulátory **přímočinné** a s **pomocnou energií** podle toho, zda se k řízení používá pouze energie odebraná z řízené soustavy, nebo ze zvláštního zdroje. Mezi přímočinné regulátory patří jednoduché regulátory v ledničkách, žehličkách, pečících troubách nebo regulátory hladiny či napětí (dobíjení baterie v autech). Jiné dělení může být podle toho, zda působení akční veličiny je v čase spojité, či probíhá pouze v určitých časech. Podle

toho mluvíme o **spojitém** nebo **diskrétním** řízení. V tomto kurzu se budeme zabývat oběma typy řízení.

Podle časového průběhu žádané (řídící) veličiny dělíme řízení do tří skupin:

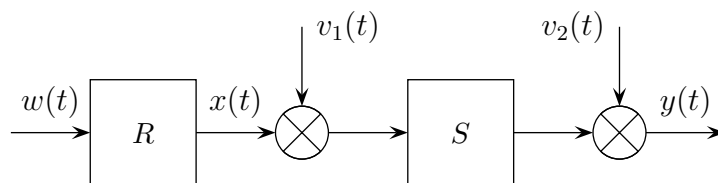
- Řízení na konstantní hodnotu je takové, kdy žádaná hodnota má po celou dobu činnosti konstantní hodnotu. Sem patří řízení frekvence a napětí v rozvodné síti, regulace hladiny (např. ve splachovačích na WC), řízení teploty v různých technologických provozech. Úkolem řízení u tohoto typu je pouze kompenzace poruch, které působí na řízený systém. Regulace na konstantní hodnotu se vyskytuje obvykle u řízení základních fyzikálních veličin (teplota, tlak, vlhkost, napětí, proud, otáčky, průtok, hladina). Radíme sem i takové systémy, u kterých se žádaná hodnota sice čas od času mění ale mezi tím je konstantní (teplota v obytných prostorech den-noč). Systémy automatického řízení na konstantní hodnotu se často obecně nazývají **regulátory**.
- Systémy typu **servomechanismus**, se vyznačují tím, že žádaná hodnota se mění předem neznámým způsobem a hlavním úkolem řízení je zajistit její co nejpřesnější sledování regulovanou veličinou. Název je odvozen od nejčastější realizace tohoto typu řízení, totiž sledování polohy. Úloha kompenzace poruch je zde obvykle druhořadá a primární je zajištění co nejrychlejší a nejvěrnější shody řídicí a řízené veličiny
- Za **programové řízení** označujeme takové, u kterého žádaná veličina má v čase předem známým průběh. Obě základní úlohy řízení (co nejvěrnější sledování a kompenzace poruch) jsou zde rovnocenné a podle toho také musí být navržen řídicí algoritmus.

Zcela základní dělení však spočívá v tom, zda se řízení děje v **otevřeném obvodu** (bez zpětné vazby, obvykle mluvíme o **ovládání**) nebo v uzavřeném obvodu **se zpětnou vazbou** (obvykle nazývané **regulace**). Tyto dva základní typy řízení jsou tak zásadní, že jim věnujeme samostatný odstavec.

## 1.2 Systémy přímého a zpětnovazebního řízení (ovládání a regulace)

Blokové schéma systému přímého řízení je na obrázku 1.1. Na řízenou soustavu ( $S$ ) s výstupem  $y$  působí kromě akční veličiny  $x$  (výstupní veličina regulátoru  $R$ ) poruchy  $v_1$  (na vstupu soustavy) a  $v_2$  (přičítá se k výstupu soustavy). Regulátor  $R$  produkuje akční veličinu  $x$  podle řídicí (žádané) hodnoty  $w$ , která působí na jeho vstupu.

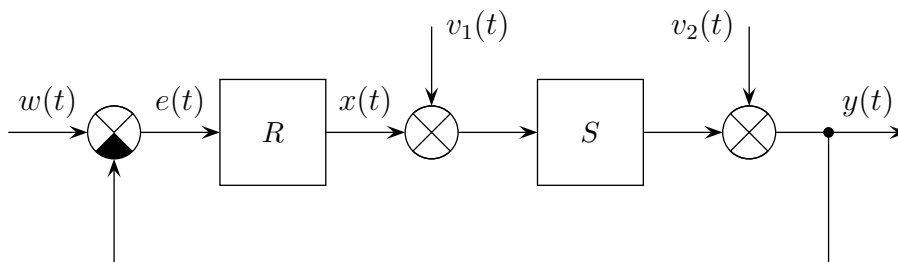
Vzhledem k tomu, že regulátor nemá žádné informace o skutečné hodnotě výstupu  $y$ , nemůže reagovat na působení obou poruchových signálů, z čehož plyne, že v tomto uspořádání není možné splnit jednu z hlavních úloh, kompenzovat vliv poruchových signálů. Druhou základní úlohu, totiž co nejvěrnější sledování žádané hodnoty lze realizovat jedině tehdy, má-li regulátor správné informace o vlastnostech soustavy  $S$ . Řízení bez zpětné vazby lze proto použít jen tehdy, chceme-li změnit vlastnosti soustavy z hlediska přenosu řídicí veličiny (podle pravidel blokové algebry je přenos dvou bloků, zapojených



**Obrázek 1.1:** Schéma ovládání

v sérii, dán součinem jejich dílčích přenosů). Jde většinou o jednoduché řízení ve smyslu ovládání (řízení křižovatky podle předem stanoveného programu, vytápění budov prostým přepnutím poloh ventilu přívodu páry podle denní doby a ročního období). V obou uvedených příkladech bude ovšem skutečná hodnota výstupu záviset na přítomnosti poruchových signálů (v případě křižovatky nepředpokládaná hustota vozidel v jednom směru, v případě vytápění budov abnormální venkovní teplota nebo jiné vlastnosti budovy- např. otevřené okno). Naproti tomu při přesné znalosti přenosu soustavy lze vypočítat tvar akční veličiny tak, aby soustava přešla z jednoho stavu do druhého při splnění zadaných podmínek (např. optimální řízení na minimum spotřebované energie nebo uskutečněné v minimálním možném čase).

Naproti tomu řízení se zpětnou vazbou (regulace), jehož blokové schéma je na obrázku 1.2, poskytuje daleko širší možnosti.

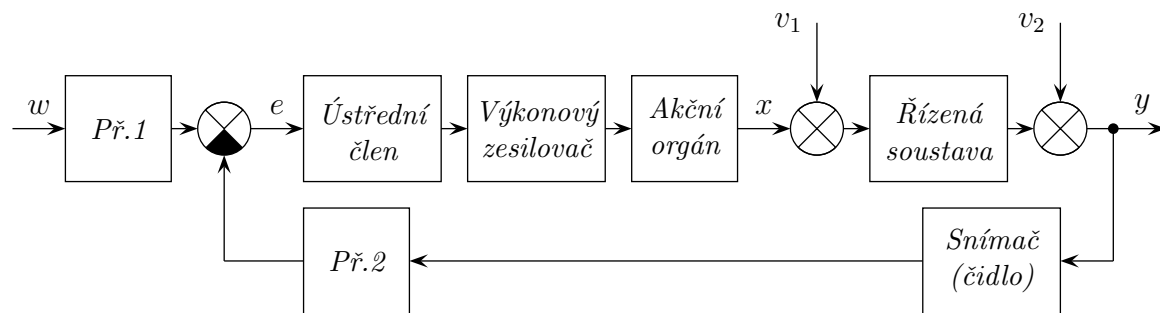


**Obrázek 1.2:** Schéma regulace

Řídící veličina  $w$  je v součtovém (rozdílovém) členu porovnávána s hodnotou regulované veličiny  $y$  a výsledná regulační odchylka  $e$  je vstupní veličinou regulátoru. Regulátor tak může reagovat nejen na změnu řídicí veličiny, ale i na důsledky působících poruch. V následujících kapitolách budeme podrobně studovat vlastnosti systémů se zpětnou vazbou, zde jen dodejme, že právě tento způsob řízení tvoří hlavní náplň kurzu Řízení a regulace I.

Blokové schéma na obrázku 1.2 je maximálně zjednodušeno pro účely pochopení principu zpětné vazby. Praktická provedení je obvykle složitější. Schéma nejčastější přístrojové realizace je na obrázku 1.3.

Řídící veličina  $w$  je zadávána buď ručně, pomocí posuvného nebo otočného ovladače a pro následný rozdíl od regulované veličiny  $y$  je třeba ji upravit na stejnou fyzikální veličinu, jako je signál z čidla regulované veličiny. K tomu slouží převodníky Př.1 a Př.2., u kterých předpokládáme linearitu a z hlediska dynamiky nulové zpoždění. Proto je v



**Obrázek 1.3:** Podrobné schéma regulace

regulačním schématu na obrázku 1.2 můžeme vynechat. Dynamické vlastnosti snímače obvykle zanedbatelné nejsou, předpokládáme však, že jsou zahrnuty do chování regulované soustavy. Samotný regulátor se skládá z ústředního členu, který určuje vlastní algoritmus řízení, výkonového zesilovače a akčního orgánu. Dynamické vlastnosti těchto bloků obvykle zahrnujeme buď do regulované soustavy, nebo do regulátoru. V obrázku 1.3 nejsou nakresleny signálové poruchy, které ovšem mohou působit v kterémkoliv místě. V technické praxi je obvyklé chápat pod slovem regulátor všechny bloky z obrázku 1.3, kromě samotné soustavy a akčního orgánu. V obchodní nabídce pak najdeme standardně vyráběné regulátory, ke kterým se připojí pouze snímač zvoleného typu a jejichž výstup je schopen ovládat vybraný akční člen (ventil, servomotor, solenoid apod.). Velikost žádané veličiny se nastavuje buď ručně na čelním panelu regulátoru, nebo se zadává dálkově z připojeného počítače. Tyto regulátory se vyrábějí pro regulaci všech běžných fyzikálních veličin (teplota, tlak, poloha, vlhkost, otáčky, napětí). Ve velké většině případů vyhoví poměrně jednoduché algoritmy řízení (reléové nebo PID). Reléové regulátory patří do oblasti nelineárních systémů a jsou obsahem dalšího kurzu.

### 1.3 Shrnutí

V této kapitole byly probrány základní pojmy z oblasti automatického řízení. Čtenář se zde seznámil s rozdílem mezi ovládáním a řízením, se základními blokovými schématy. Bylo zde popsáno podrobné regulační schéma

### 1.4 Kontrolní otázky

**Otázka 1.1** *Jaký je rozdíl mezi ovládáním a regulací?*

**Otázka 1.2** *Jak jsou definovány lineární systémy?*

**Otázka 1.3** *Vyjmenujte základní veličiny, které se vyskytují v systémech automatického řízení a popište je?*

**Otázka 1.4** *Jaký je rozdíl mezi přímočinným regulátorem a regulátorem s pomocnou energií?*

**Otázka 1.5** *Jak se rozděluje řízení podle časového průběhu žádané hodnoty?*

**Otázka 1.6** *Vysvětlete pojmy SISO a MIMO.*

**Otázka 1.7** *Nakreslete podrobné regulační schéma pomocí blokové diagramu.*

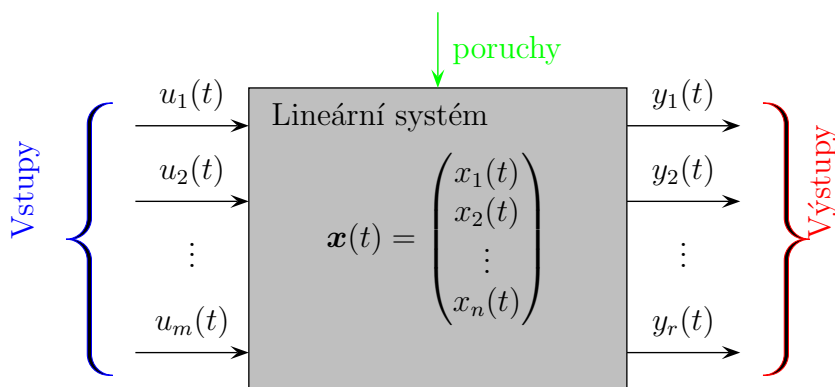
**Otázka 1.8** *Nakreslete blokové schéma ovládání a regulace.*

## 2 Stavový popis systémů

V předmětu *Signály, procesy, soustavy* jste se dozvěděli o vnějším popisu systémů. Do vnějšího popisu spadá popis pomocí diferenciální rovnice, impulsové charakteristiky, přechodové charakteristiky, frekvenční charakteristiky, operátorového a frekvenčního přenosu systému a rozložení nul a pólů. Jejich společným rysem je fakt, že se nezajímají o to, co se v systému skutečně děje, ale pouze o relaci mezi vstupem a výstupem. Na systém tedy pohlížejí jako na černou skříňku. V této kapitole se seznámíme se stavovým popisem systémů. Základní stavební prvky stavového popisu jsou integrátor, sumátor a proporcionalní člen. Vzájemnému propojení těchto základních prvků tak, aby popisovaly chování nějakého systému se říká stavový diagram. Jak již vyplývá z názvu, je tento popis založen na pojmu stav systému na který můžeme pohlížet jako na výstup integrátoru. Stavový popis vznikl z důvodu možnosti studovat stavy uvnitř systému, zejména u vícerozměrových a u nelineárních systémů.

### 2.1 Základní pojmy stavového popisu

Doposud jsme většinou uvažovali systém s jedním vstupem a jedním výstupem. Stavový popis se často používá pro systémy s více vstupy a výstupy. Proto při zavádění stavového popisu uvažujme lineární systém s  $m$  vstupy a  $r$  výstupy, tak jak je znázorněno na obrázku 2.1. Takovýto systém bychom mohli popsat množstvím přenosů mezi jednotlivými vstupy a výstupy. Pro zvýšení přehlednosti popisu se používá maticového zápisů. Tím bychom však opět získali pouze vnější popis.



Obrázek 2.1: Obecný lineární systém

K tomu, abychom mohli provést vnitřní popis systému 2.1 potřebujeme zavést některé pojmy

**Stav systému** je nejmenší počet proměnných  $n$  (stavových proměnných), jejichž znalost v čase  $t = t_0$  spolu se znalostí vstupů do systému pro časy  $t > t_0$  plně určuje chování systému v čase  $t > t_0$ . Stav systému určuje stavový vektor.



**Stavový vektor** je sloupcový vektor, který většinou značíme  $\mathbf{x}(t)$  a jehož složky tvoří stavové proměnné (viz. 2.1).

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

**Stavové proměnné** dynamického systému jsou časové funkce, které určují vnitřní stav systému. Z hlediska praktického použití je lepší, když stavové proměnné vyjadřují nějakou měřitelnou veličinu uvnitř systému. Obecně však stavy zvolené stavy nemusí v systému fyzicky existovat.

**Stavový prostor** je  $n$ -rozměrný prostor reálných čísel  $\mathcal{R}^n$ , jehož souřadnice tvoří stavové proměnné. Stav systému v daném okamžiku je bod v tomto prostoru.

**Vektor vstupů** je  $m$ -rozměrný sloupcový vektor, jehož složky tvoří vstupní veličiny systému a značíme jej obvykle  $\mathbf{u}(t)$  (viz. 2.1). U systému s jedním vstupem je  $\mathbf{u}(t)$  skalární veličina  $\mathbf{u}(t) = u(t)$

**Vektor výstupů (výstupní vektor)** je  $r$ -rozměrný sloupcový vektor, jehož složky tvoří výstupní veličiny systému a značíme jej obvykle  $\mathbf{y}(t)$  (viz. 2.1). U systému s jedním výstupem je  $\mathbf{y}(t)$  skalární veličina  $\mathbf{y}(t) = y(t)$

**Stavové rovnice** určují vztah mezi stavem systému a jeho vstupem a výstupy. První stavovou rovnicí tvoří soustava diferenciálních rovnic prvního řádu. Udává vztah mezi derivacemi stavových proměnných a vektory stavu a vstupu. Tím vlastně popisuje, jak se vyvíjí stavy systému v čase. Na stav se můžeme dívat jako na vektor v  $n$ -rozměrném prostoru, jehož poloha se v čase mění a tím jeho konec vytváří křivku, která se nazývá stavová trajektorie

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{2m}u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{nm}u_m(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vidíme, že tento popis umožňuje vazbu derivace stavové proměnné na libovolný vstup nebo stav. Pokud zde tento vztah není, je odpovídající koeficient roven nule. Především rovnice lze jednoduše přepsat maticově

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.3)$$

Druhá stavová rovnice určuje vztah mezi vektorem výstupu a vektory stavu a vstupu.

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1(t) + \cdots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + d_{1m}u_m(t) \\ y_2 &= c_{21}x_1(t) + \cdots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + d_{2m}u_m(t) \\ &\vdots \\ y_r &= c_{r1}x_1(t) + \cdots + c_{rn}x_n(t) + d_{r1}u_1(t) + d_{rm}u_m(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Druhou stavovou rovnici můžeme také zapsat maticově

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.5)$$

Matice koeficientů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  mají následující význam

$\mathbf{A}$  je matice vnitřních vazeb systému (též systémová matice nebo matice zpětných vazeb). Má rozměr  $n \times n$

$\mathbf{B}$  je matice vazeb systému na vstup (též vstupní matice). Má rozměr  $n \times m$ .

$\mathbf{C}$  je matice vazeb výstupu na stav (též výstupní matice). Má rozměr  $r \times n$ .

$\mathbf{D}$  je matice přímých vazeb výstupu na vstup (též výstupní matice). Má rozměr  $r \times n$ . Z hlediska dynamických vlastností nejsou tyto vazby podstatné a v řadě případů je tato matice nulová.

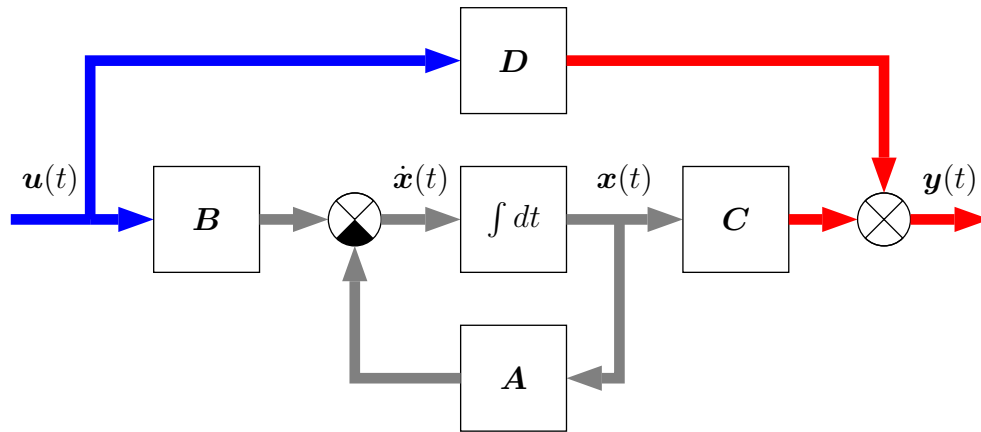
U lineárního stacionárního systému jsou všechny koeficienty matic konstantní reálná čísla. Pokud jsou některé koeficienty závislé na čase, pak se jedná o časově proměnný systém. U nelineárního spojitého systému mohou být prvky matic závislé na stavových proměnných, nebo na vstupních veličinách. Stavové rovnice se potom nezapisují maticově, ale pomocí obecnějšího zápisu, se kterým se budete setkávat v navazujícím kurzu Regulace a řízení II.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

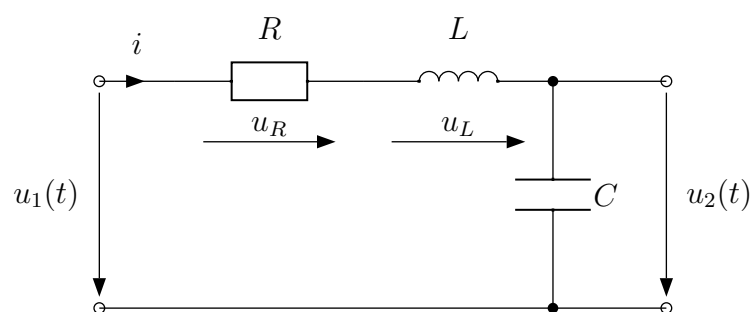
Na obrázku 2.2 je ukázáno obecné stavové schéma, které vyjadřuje rovnice (2.3) a (2.5). Blok s integrátory představuje  $n$  nezávislých integrátorů. Všechny signály jsou nakresleny tučně, aby se upozornilo na skutečnost, že se obecně jedná o vektory. Barevně jsou rozlišeny různé dimenze vektorů. Na rozdíl od vnitřního popisu, kdy je relace mezi vstupem a výstupem dána jednoznačně není způsob stavového popisu jednoznačný. Různé tvary matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  mohou totiž z hlediska vstup výstupního dávat stejné odezvy.

**Příklad 2.1** *U následujícího schématu určete*

a) *přenos v Laplaceově transformaci*



Obrázek 2.2: Obecné stavové schéma systému



Obrázek 2.3: Jednoduché elektrické schéma

b) *stavový popis*

c) *z určeného stavového popisu vyjádřete přenos v Laplaceově transformaci*

ad a) Pro určení přenosu potřebujeme znát impedance jednotlivých prvků. Jak víme z teorie elektrických obvodů je impedance cívky  $pL$  a impedance kondenzátoru  $1/pC$ . Operátorový přenos se určí jako poměr obrazu výstupního napětí  $U_2(p)$  ku obrazu vstupního napětí  $U_1(p)$ . Pro dané obrazy platí: výstupní napětí je napětí na kondenzátoru  $U_2(p) = I(p)/pC$  a vstupní napětí je dáno součtem napětí na odporu, indukčnosti a kondenzátoru  $U_1(p) = RI(p) + pLI(p) + \frac{1}{pC}I(p)$ . Výsledný přenos můžeme psát

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{pC}I(p)}{RI(p) + pLI(p) + \frac{1}{pC}I(p)} = \frac{1}{LCp^2 + CRp + 1}$$

Určení přenosu tohoto jednoduchého elektrického zapojení je vcelku jednoduchou záležitostí. Všimněme si, že ze zjištěného přenosu nejsme schopni zpětně určit proud nebo napětí na jednotlivých prvcích. Dává nám pouze představu o vztahu mezi vstupem a výstupem. Podívejme se nyní, jak je to s určením stavového popisu.

ad b) Při určování stavového popisu je potřeba zvolit stavové proměnné. Jako stavové proměnné se u elektrických obvodů volí veličiny, které skokově nemění svoji hodnotu. Jedná se o napětí na kondenzátoru a o proud cívkou. I přes toto doporučení existuje při volbě stavových proměnných volnost. Můžeme si totiž tyto veličiny vybrat v libovolném pořadí. Zvolme si například proud cívkou, který odpovídá proudu v celém obvodu  $i$  jako stavovou proměnnou  $x_2$  a napětí na kondenzátoru  $C$ , které je vlastně výstupním napětím  $u_2$  jako druhou stavovou proměnnou  $x_1$ . Z fyziky víme, že pro vztah mezi proudem a napětím na cívce a na kondenzátoru platí vztahy.

$$i = C \frac{du_2}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Tyto vzorečky se pokusíme upravit tak, aby se zde vyskytovaly pouze stavové proměnné a vstupy a výstupy. Napětí na cívce můžeme rozepsat jako  $u_L = u_1 - u_R - u_2 = u_1 - Ri - u_2$ . Dosazením do předchozích rovnic a vyjádřením derivací stavových proměnných získáme

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u_1 - Ri - u_2)$$

Toto je první stavová rovnice popisující chování elektrického schématu podle obrázku 2.3. Druhá stavová rovnice popisuje výstupy ze systému. V našem případě máme jeden výstup, který je přímo roven jedné stavové proměnné  $u_2(t)$ ,

$$y(t) = u_2(t)$$

Zkusme si stavové rovnice zapsat maticově. Předtím než tak učiníme si nejprve přepíšme předchozí rovnice do tvaru rovnic 2.2 a 2.4

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} &= 0u_2 + \frac{1}{C}i + 0u_1 \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u_1 \\ y &= 1u_2 + 0i + 0u_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

V maticovém zápisu potom dostáváme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{du_2}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_1 \\ y &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} u_2 \\ i \end{pmatrix} + 0u_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.2 Vzájemný vztah mezi vnitřním a vnějším popisem

Mezi vnitřním a vnějším popisem existuje vzájemná souvislost. Pokud máme stavový popis systému, můžeme z něho určit matici přenosových funkcí. To, že se jedná o matici je dáno tím, že stavový popis je definován obecně pro více vstupů a výstupů. Naproti tomu přenos systému je definován mezi jedním vstupem a jedním výstupem. V této matici jsou uloženy všechny vzájemné kombinace vstupů a výstupů. Tento směr převodu je jednoznačný. Pokud máme přenos systému s jedním vstupem a jedním výstupem, pak je možné ho převést na stavový popis. Tento převod již není jednoznačný, protože existuje více, na první pohled různých, stavových popisů, které mají stejné chování, jako jeden přenos.

## 2.3 Určení matice přenosových funkcí ze stavového popisu

Uvažujme lineární stacionární systém s  $m$  vstupy a  $r$  výstupy. Vnější popis je reprezentován maticí přenosových funkcí  $\mathbf{F}(p)$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11}(p) & F_{12}(p) & \cdots & F_{1m}(p) \\ F_{21}(p) & F_{22}(p) & \cdots & F_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r1}(p) & F_{r2}(p) & \cdots & F_{rm}(p) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Pro vektor obrazů výstupů  $\mathbf{Y}(p) = (Y_1(p), Y_2(p), \dots, Y_r(p))^T$  platí

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)\mathbf{U}(p) \quad (2.10)$$

kde  $\mathbf{U}(p) = (U_1(p), U_2(p), \dots, U_m(p))^T$ .

Pro jednotlivé prvky matice přenosů (přenosové matice)  $\mathbf{F}(p)$  platí  $F_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{U_j(p)}$

Protože  $\mathbf{Y}(p)$  a  $\mathbf{U}(p)$  jsou vektory, jejichž dělení není definováno, nemůžeme definiční vztah pro celou matici  $\mathbf{F}(p)$  psát ve stejném tvaru jako vztahy pro jednotlivé její prvky. Odvození matice přenosu provedeme převodem stavových rovnic do Laplaceovy transformace.

$$p\mathbf{X}(p) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{C}\mathbf{X}(p) + \mathbf{D}\mathbf{U}(p) \quad (2.12)$$

Přenosy jsou definovány pro nulové počáteční podmínky, proto se první rovnice zjednoduší na

$$p\mathbf{X}(p) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p) \quad (2.13)$$

Nyní si vyjádříme  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(p) \quad (2.14)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice.

Dosazením takto upravené první stavové rovnice do druhé stavové rovnice v Laplaceově transformaci dostaneme

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(p) \quad (2.15)$$

Z matematiky víme, že inverze matice  $(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  se dá spočítat jako podíl její adjungované s jejím determinanem. Potom

$$\mathbf{Y}(p) = \left[ \mathbf{C} \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{U}(p) \quad (2.16)$$

V hranatých závorkách je získaný přenos  $\mathbf{F}(p)$ . Přenosová matice má póly rovné vlastním číslům matice  $\mathbf{A}$ . To neznamená, že by všechny přenosy v přenosové matici obsahovaly všechny póly  $\mathbf{F}(p)$ , protože některé z nich se mohou zkrátit s kořenovými činiteli v čitateli.

Zpětná transformace matice přenosů  $\mathbf{F}(p)$  dává matici impulsních charakteristik  $\mathbf{G}(t)$ . Prvky této matice  $g_{ij}(t)$  reprezentují odezvu systému na  $i$ -tém výstupu na Dirakov impuls působící na  $j$ -tém vstupu.

**Příklad 2.2** *Systém je popsán následujícími maticemi:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (1 \ 2) \quad \mathbf{D} = 0 \quad (2.17)$$

Určete přenosovou matici  $\mathbf{F}(p)$ .

Na základě dimenzí matic víme, že systém má dva vstupy a jeden výstup. Nejprve vypočítáme inverzi matice

$$p\mathbf{I} - \mathbf{A} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p+2 \end{pmatrix}$$

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \frac{1}{p(p+2)} \begin{pmatrix} p+2 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Pro matici přenosů potom platí

$$\mathbf{F}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = (1 \ 2) \frac{1}{p(p+2)} \begin{pmatrix} p+2 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

## 2.4 Přejchod k jiným stavovým proměnným

Regulární transformace stavových proměnných vytváří novou stavovou reprezentaci, která má stejné vztahy mezi vstupy a výstupy. Množina  $n$  nových stavových proměnných se získá transformací

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ x'_2 &= p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tento vzorec můžeme zapsat maticově

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (2.21)$$

Pokud je provedená transformace regulární, potom se dají původní stavové proměnné vyjádřit na základě nových stavových proměnných pomocí inverzní transformace

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}' \quad (2.22)$$

Když dosadíme inverzní transformaci do stavových rovnic (2.3) a (2.5), získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}' &= (\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x}' + (\mathbf{P}\mathbf{B})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x}' + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Zavedeme-li označení nových matic

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

jsou nové stavové rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{A}'\mathbf{x}' + \mathbf{B}'\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}'\mathbf{x}' + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.25}$$

Ukažme, že vztahy mezi vstupy a výstupy jsou u obou stavových popisů stejné.

Matice přenosových funkcí transformovaného systému je

$$\mathbf{F}'(p) = \mathbf{C}'(p\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{B}'$$

Pokud v této rovnici nahradíme nové matice maticemi původního systému, získáme rovnici

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(p) &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}(p\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}(p\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{P}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}^{-1}]^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\end{aligned}$$

což je stejná matice přenosových funkcí jako pro systém s původními stavovými proměnnými.

**Příklad 2.3** Pomocí programu Matlab převed'te systém popsaný přenosem

$$F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 3p + 1}$$

na systém popsaný stavovými rovnicemi. Získané vyjádření převed'te na jiný tvar pomocí transformační matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nejprve zadáme přenos

```
>> F = tf(1, [1 2 3 1]);
```

Potom ho převedeme na stavový popis

```
>> Fss = ss(F)
```

a =

	x1	x2	x3
x1	-2	-0.75	-0.0625
x2	4	0	0
x3	0	4	0

c =

	x1	x2	x3
y1	0	0	0.25

b =

	u1
x1	0.25
x2	0
x3	0

d =

	u1
y1	0



stavový popis systému přetransformujeme na nový pomocí transformační matice

```
>> P = [1 0 1;0 1 2;0 0 3]; Fsst = ss2ss(Fss,P)
a =
      x1      x2      x3
x1      -2      3.25    -1.521
x2       4       8      -6.667
x3       0      12       -8

b =
      u1
x1    0.25
x2     0
x3     0

c =
      x1      x2      x3
y1     0       0    0.08333

d =
      u1
y1     0
```

## 2.5 Určení stavového popisu z přenosu jednorozměrných systémů

Máme-li přenos jednorozměrného systému v Laplaceově transformaci, či diferenciální rovnici, můžeme provést převod na stavový popis. Jak již bylo řečeno, není stavový popis jednoznačný. Některé tvary přenosů mají zvláštní postavení při určování stavového popisu systému. Tato zvláštnost se projevuje tím, že prvky matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  přímo souvisejí se zápisem v Laplaceově transformaci, takže jejich určení je (jak si ukážeme v následujících podkapitolách) jednoduchou záležitostí. O přenosové funkci předpokládáme, že je ve tvaru racionální funkce lomené, neobsahuje žádné nevykrácené nuly a póly. Takový systém byl neřiditelný a nepozorovatelný. Tyto dva pojmy budou rozebrány později.

### 2.5.1 Přímé programování

Tento způsob převodu je vhodný, jestliže přenosová funkce je ve tvaru poměru dvou polynomů

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \text{ kde } m \leq n \quad (2.26)$$

Stavový diagram, který odpovídá tomuto systému je na obrázku 2.4, což dokážeme tak, že odvodíme přenosovou funkci diagramu. Pro Laplaceův obraz funkce  $e(t)$  platí

$$E(p) = U(p) - E(p) \left( \frac{a_{n-1}}{p} + \frac{a_{n-2}}{p^2} + \dots + \frac{a_0}{p^n} \right)$$

a pro obraz výstupu

$$Y(p) = E(p) \left( b_n + \frac{1}{p} b_{n-1} + \frac{1}{p^2} b_{n-2} + \dots + \frac{1}{p^{n-1}} b_1 + \frac{1}{p^n} b_0 \right)$$

Vyjádřením  $U(p)$ , dosazením do poměru  $Y(p)/U(p)$  a vynásobením čitatele i jmenovatele  $p^n$  dostaneme stejný přenos jako je uveden v rovnici 2.26. Pokud platí  $m = n - k$ ,

jsou koeficienty  $b_i$  pro  $i = n, n-1, n-2, \dots, n-k$  nulové. Pokud zvolíme výstupy integrátorů za stavové proměnné  $x_1(t)$  až  $x_n(t)$ , jsou matice systému ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{C} = [(b_0 - a_0 b_n), (b_1 - a_1 b_n), \dots, (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)] \quad \mathbf{D} = b_n$$

U většiny reálných dynamických systémů platí  $n > m$ . To znamená, že koeficient  $b_n$  je nulový, čímž se podstatně zjednoduší matice  $\mathbf{C}$  a matice přímých vazeb ze vstupu na výstup je nulová  $\mathbf{D} = 0$ . Při tomto způsobu konstrukce získáváme zvláštní tvar systémových matic. Matice  $\mathbf{A}$  má nenulové pouze jednotkové koeficienty nad hlavní diagonálou a v posledním řádku jsou záporně vzaté koeficienty polynomu ve jmenovateli přenosu  $F(p)$ . Jak již víme, je dynamika systému dána právě jmenovatelem přenosu. Proto nepřekvapuje, že je matice zpětných vazeb svázána právě s jmenovatelem. Tato realizace stavového popisu se nazývá *Frobeniův kanonický tvar*.

**Poznámka:** V některé literatuře a také v programu Matlab jsou stavy indexovány v obráceném pořadí. To se nám projeví ve změně tvaru systémových matic. Matice  $\mathbf{A}$  má potom nenulové pouze jednotkové koeficienty *pod* hlavní diagonálou a koeficienty v *prvním* řádku, které jsou záporně vzaté koeficienty ve jmenovateli přenosu  $F(p)$ , ale v *obráceném* pořadí. Matice  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$ , které jsou v našem uvažovaném případě jednorozměrových systémů vektory jsou potom v obráceném pořadí. Je trošku matoucí, že i tento způsob zápisu je nazýván *kanonickým tvarem*.

### 2.5.2 Paralelní programování

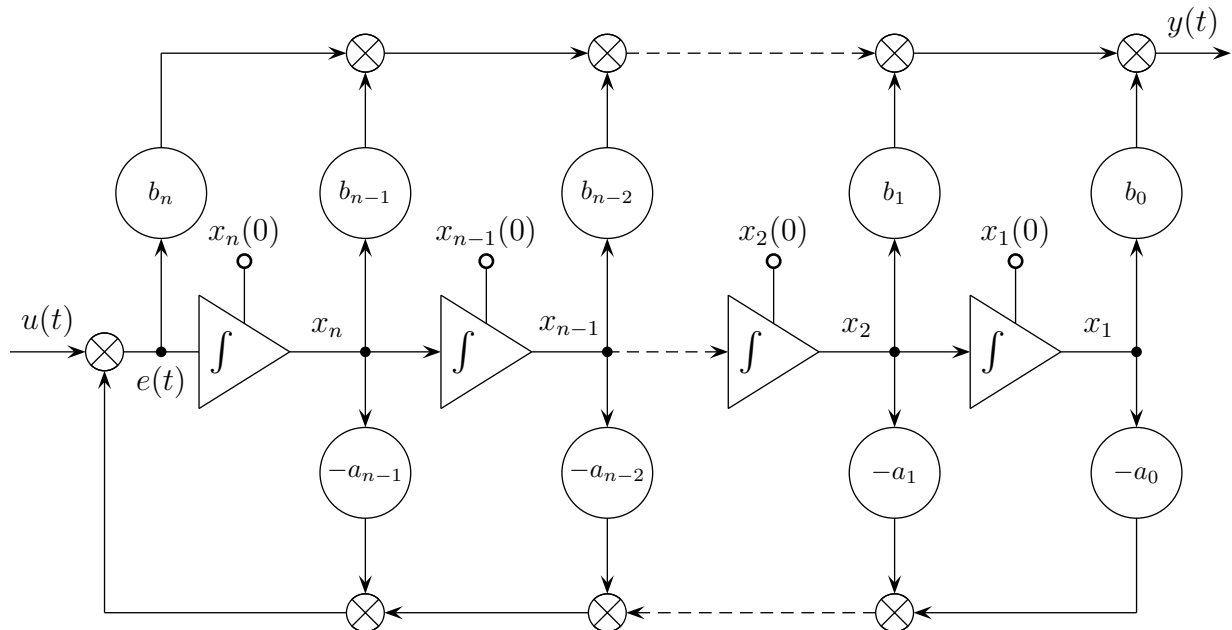
Tento způsob konverze přenosové funkce do stavového popisu se používá tehdy, pokud je přenos systému ve tvaru součtu jednoduchých výrazů, jejichž jmenovatel je nejvýše druhého řádu.

$$F(p) = \frac{b_1}{p + a_1} + \frac{b_2}{p + a_2} + \cdots + \frac{b_k}{p^2 + a_{k-1}p + a_k} + \frac{b_n}{p + a_n} \quad (2.28)$$

Stavový diagram odpovídající tomuto přenosu je na obrázku 2.5. Stavové matice mají tvar.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{k-1} & -a_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{C} = [b_1, b_2, \dots, 0, b_k, \dots, b_n] \quad \mathbf{D} = 0$$



Obrázek 2.4: Stavový diagram přímého programování

Tento tvar matice  $\mathbf{A}$  je Jordanův-kanonický-tvar. Matice  $\mathbf{A}$  má všechny prvky mimo hlavní diagonálu nulové a na hlavní diagonále jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ . Vyjimku tvoří koeficienty odpovídající dvojčlenu (vlastní čísla jsou komplexní). Tento tvar je nesmírně výhodný pro další výpočty a pokud je to možné, snažíme se jej vždy použít. Podmínkou je ovšem znalost vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ , což bývá málokdy splněno.

### 2.5.3 Sériové programování

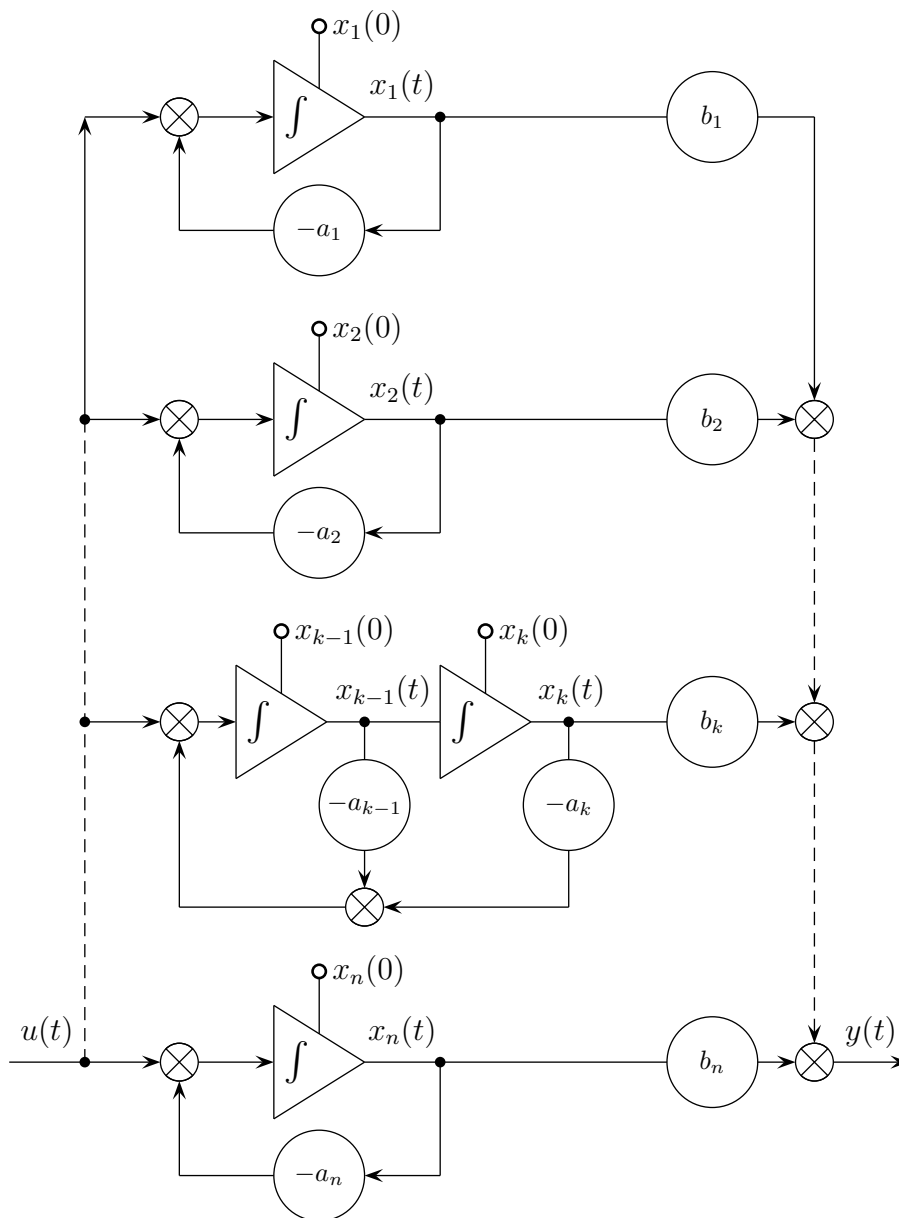
Převod pomocí sériového programování je vhodný, pokud je přenosová funkce ve tvaru součiny kořenových činitelů.

$$F(p) = \frac{b_0(p + b_1)(p + b_2) \cdots (p + b_m)}{(p + a_1)(p + a_2) \cdots (p + a_n)} \quad (2.30)$$

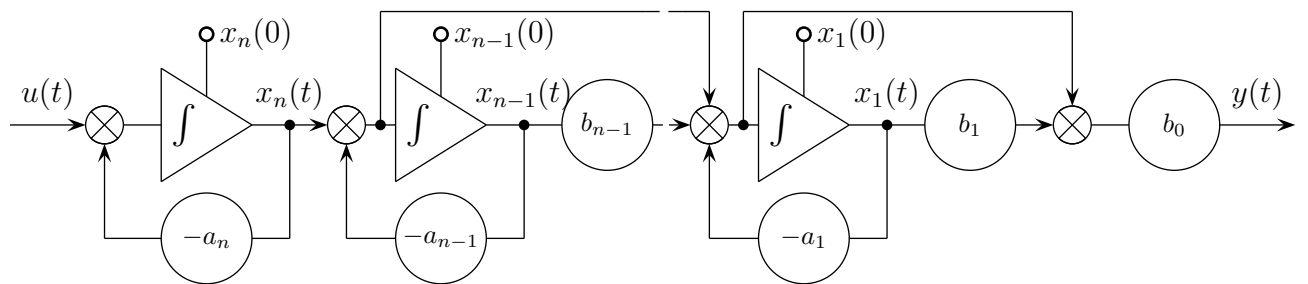
Stavový diagram, který odpovídá přenosu 2.30, je na obrázku 2.6. Tvoří jej kaskádní spojení elementárních bloků, které odpovídají jednotlivým pólům a nulám přenosu. Pokud by se v čitateli nebo jmenovateli přenosu 2.30 vyskytly komplexní kořeny, použije se pro jejich realizace blok sestavený ze dvou integrátorů. Zvolíme-li za stavové proměnné opět výstupy jednotlivých integrátorů, bude platit tato soustava rovnic.

**Příklad 2.4** Přenos systému je dán ve třech tvarech. Sestavte stavové diagramy a matice pro všechny tři případy.

$$F(p) = \frac{2p + 1}{p^2 + 5p + 4} = \frac{2(p + 0.5)}{(p + 4)(p + 1)} = \frac{7/3}{p + 4} - \frac{1/3}{p + 1}$$



Obrázek 2.5: Stavový diagram paralelního programování



Obrázek 2.6: Stavový diagram sériového programování

Uvedeným tvarům přenosu odpovídají realizace stavových diagramů metodou přímého, sériového a paralelního programování. Schémata stavových diagramů jsou na obrázcích 2.7, 2.8 a 2.5. Stavové matice mají následující tvary:

a) přímé programování

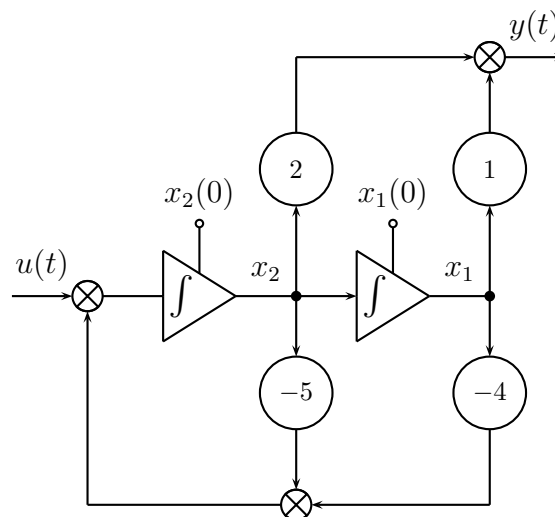
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (1, 2) \quad \mathbf{D} = 0 \quad (2.31)$$

b) sériové programování

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (-0.5, 2) \quad \mathbf{D} = 0 \quad (2.32)$$

c) paralelní programování

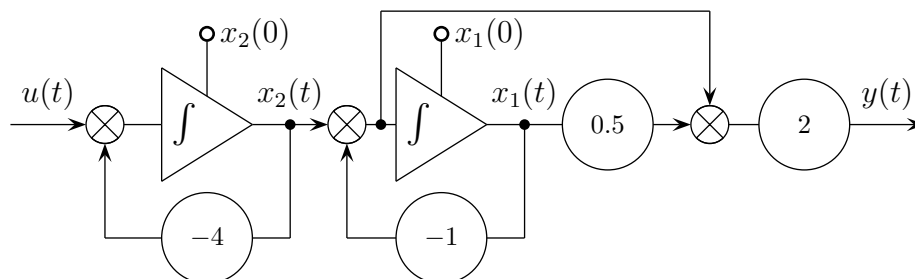
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (7/3, -1/3) \quad \mathbf{D} = 0 \quad (2.33)$$



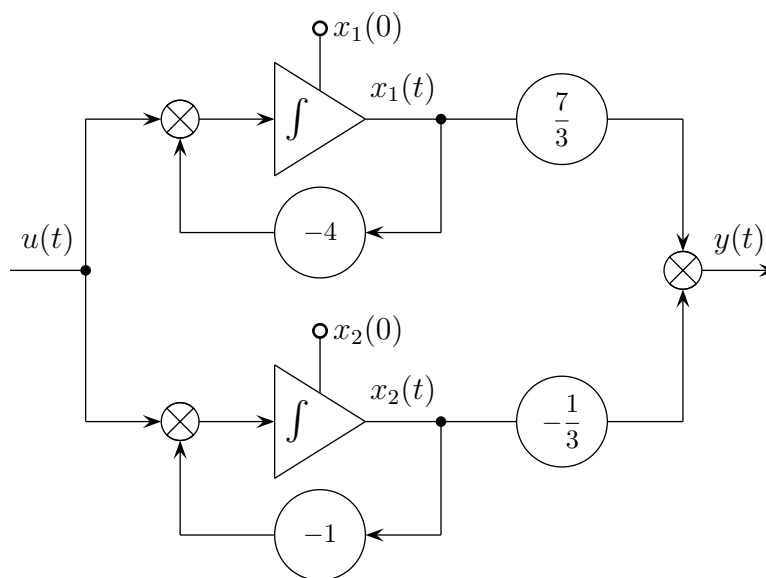
Obrázek 2.7: Příklad přímého programování

## 2.6 Shrnutí

V této kapitole jsme se seznámili se základy stavového popisu. Po nadefinování pojmů byly vysvětleny dvě stavové rovnice. První stavová rovnice definuje chování stavů v čase, protože obsahuje první derivace stavových proměnných. Určuje dynamické chování systému. Druhá stavová rovnice je algebraická. Definuje, jak se jednotlivé vstupy a stavy podílejí na výsledných výstupech systému. Stavový popis systému není jednoznačně daný, jako je tomu u vstup-výstupního popisu. Existuje nekonečně mnoho stavových popisů



Obrázek 2.8: Příklad sériového programování



Obrázek 2.9: Stavový diagram příkladu na paralelního programování

systému, který má jednu a tutéž matici přenosů. Již při různé volbě pořadí stavových proměnných ve stavovém vektoru vede na odlišné matice systému. Vysvětlili jsme si, jakým způsobem lze transformovat stavové rovnice na jiný tvar pomocí regulární transformační matice. Naučili jsme se zde převádět stavový popis na matici přenosových funkcí a zpětně ze známého přenosu SISO systému popsaného přenosovou funkcí získat stavové vyjádření. V závislosti na zadání přenosové funkce lze s výhodou použít přímé programování, sériové programování nebo paralelní programování.

## 2.7 Kontrolní otázky

**Otázka 2.1** *Napište stavové rovnice lineárního spojitého systému a popište je.*

**Otázka 2.2** *Je stavový popis jednoznačný?*

**Otázka 2.3** *Proč se používá stavového popisu k popisu systémů a jaké jsou jeho výhody?*

**Otázka 2.4** *Jaké jsou hodnoty matic  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  charakterizující stavový popis spojitého systému?*

**Otázka 2.5** *Nakreslete obecné stavové schéma lineárního spojitého systému.*

**Otázka 2.6** *Jaké jsou základní postupy pro výpočet matic systému z přenosu u jednorozměrných systémů.*

**Otázka 2.7** *Jaký tvar převodu do stavového prostoru je vhodný, pokud je přenosová funkce zapsána ve tvaru poměru dvou polynomů.*

**Otázka 2.8** *Jaký tvar převodu do stavového prostoru je vhodný, pokud je přenosová funkce zapsána ve tvaru poměru součinů kořenových činitelů.*

**Otázka 2.9** *Jaký tvar převodu do stavového prostoru je vhodný, pokud je přenosová funkce zapsána ve tvaru součtu jednoduchých výrazů, jejichž jmenovatel je nejvýše druhého řádu.*

### 3 Regulované soustavy

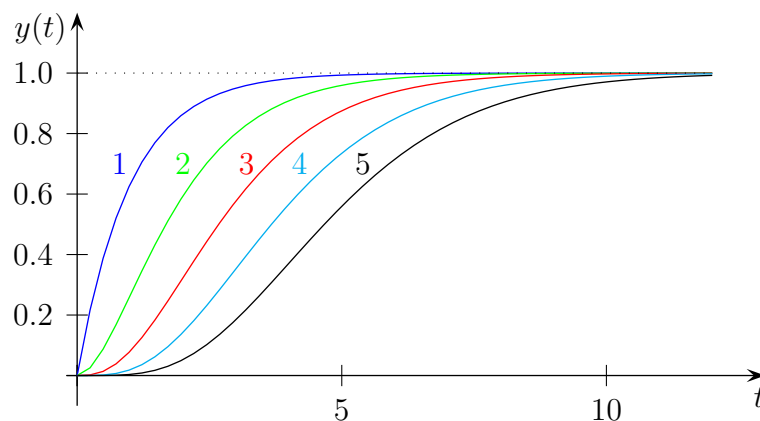
Objekty řízení, neboli regulované soustavy, jsou velmi rozmanité a mají různé vlastnosti. Bylo již řečeno, že v rámci tohoto kurzu se omezíme na soustavy se soustředěnými parametry, časově neproměnné a linearizovatelné. Přesto, vzhledem k rozmanitosti dynamických vlastností, zbývá ještě velké množství různých typů soustav. V této kapitole ukážeme několik skupin soustav, které mají charakteristické vlastnosti a zejména v technické praxi se často vyskytují. Dále se budeme zabývat identifikací reálných soustav a tvorbou jejich modelů, což je nutně spojeno s aproximací (kromě již zmíněné linearizace).

#### 3.1 Přetlumené (nekmitavé) soustavy

V průmyslové praxi se nejčastěji setkáváme se soustavami, které jsou tvořeny sériovým spojením setrvačných článků. Všechny póly takových soustav jsou reálné záporné, impulsní i přechodová charakteristika nemá kmitavý průběh. Z hlediska řízení je důležitá jak hodnota největších (dominantních) časových konstant, tak řád soustavy (tj. počet setrvačných článků), neboli také řád popisující diferenciální či diferenční rovnice. Názorně to ukazuje obrázek 3.1, na kterém jsou uvedeny přechodové charakteristiky soustav, tvořených setrvačnými články se stejnou časovou konstantou. Přenosová funkce soustavy má tvar

$$F(p) = \frac{k_s}{(Tp + 1)^n}$$

kde  $k_s$  je statické zesílení,  $T$  je časová konstanta a  $n$  je její řád. Na obrázku 3.1 jsou



**Obrázek 3.1:** Přechodové charakteristiky pro systémy prvního až pátého řádu

přechodové charakteristiky pro  $k_s = 1$ ,  $T = 1$  a  $n = 1, 2, \dots, 5$ . Podobné vlastnosti mají i diskrétní soustavy, složené ze setrvačných článků. Pak je ovšem podstatné, zda mezi jednotlivými články je či není zapojen vzorkovací člen.

Připomeňme, že spojitá soustava, která má přenosovou funkci ve tvaru:

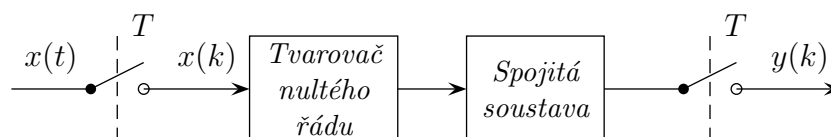
$$F(p) = \frac{k_s}{(T_1p + 1)(T_2p + 1) \cdots (T_np + 1)}$$



bude mít diskretní obdobu přenosové funkce (platí pro případ blokově znázorněný na obrázku 3.2, kdy na vstupu i výstupu soustavy jsou zapojeny vzorkovací členy a před soustavou je zařazen tvarovací člen nultého řádu- tzv. přídržovač) ve tvaru

$$F(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_{n-1}) \dots (z - \alpha_n)}$$

kde  $\alpha_i = e^{-\frac{T_v}{T_i}}$ .  $T_v$  je perioda vzorkování a  $T_i$  jsou jednotlivé časové konstanty spojitě soustavy. Podrobné odvození a vysvětlení procesu vzorkování je náplní kurzu Systémy, procesy a signály, zde uvádíme jen podstatné důsledky. K nim patří i ta skutečnost, že při



**Obrázek 3.2:** Proces diskretizace spojitě soustavy

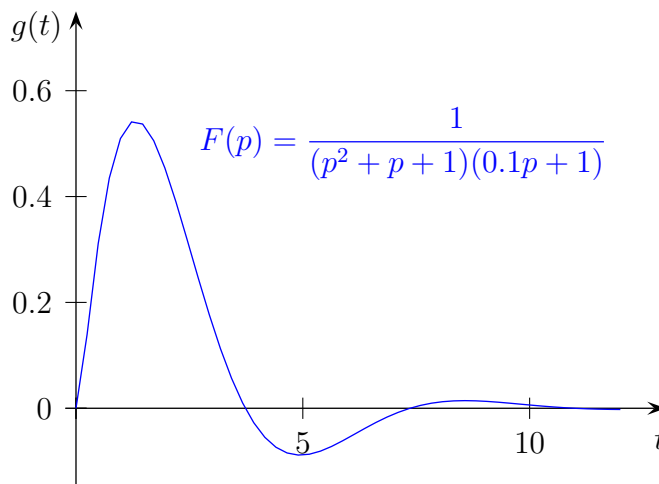
procesu vzorkování mohou u diskretní přenosové funkce vzniknout nuly (kořeny polynomu v čitateli přenosové funkce), které leží v nestabilní oblasti, tj. vně jednotkové kružnice v komplexní rovině  $Z$ . Pokud přenos soustavy obsahuje takové nuly (u spojitých soustav tyto nuly leží v pravé polorovině roviny  $p$ ), jde o soustavu s neminimální fází. Řízení takových soustav a návrh jejich řídicích algoritmů vyžaduje zvláštní postupy, na které v případě potřeby v tomto textu zvláště upozorníme. Zatímco u spojitých systémů se neminimálně fázové soustavy vyskytují zřídka (výjimku tvoří ty soustavy, ve kterých je přítomno dopravní zpoždění), v diskretních systémech je to jev poměrně běžný. Regulovaná soustava je často tvořena několika sériově spojenými články s různými časovými konstantami. Pak záleží na tom, zda se jedná o přibližně stejné nebo velmi rozdílné konstanty. Jak už bylo řečeno, každé časové konstantě odpovídá pól přenosové funkce (při použití stavového popisu je to vlastní číslo matice zpětných vazeb  $A$ ). Všechny tyto póly leží v případě spojitěho systému na záporné reálné poloose, v případě diskretního systému na kladné reálné poloose v intervalu 0-1. Čím větší je časová konstanta, tím blíže k počátku (u spojitěho systému) nebo blíže k bodu 1 (u diskretního systému) jí odpovídající pól leží. Víme, že na dynamiku soustavy mají největší vliv největší časové konstanty. Proto ty póly, které leží nejbliž zmíněným bodům nazýváme dominantní. Často pak při návrhu řídicího algoritmu pracujeme se zjednodušeným modelem soustavy, ve kterém jsou pouze dominantní póly a ostatní zanedbáváme. To je ovšem možné jedině tehdy, když frekvenční vlastnosti celého otevřeného obvodu (tj. včetně regulátoru) jsou takové, že vliv zanedbání malých časových konstant se neprojeví. Prakticky to znamená, že oblast středních kmitočtů, kde tvar frekvenční charakteristiky určuje jak stabilitu, tak dynamické vlastnosti uzavřeného obvodu, je nižší, než oblast, ve které by se projevil vliv přítomnosti oněch zanedbaných konstant.

### 3.2 Kmitavé soustavy

O kmitavých soustavách mluvíme tehdy, jestliže se v jejich přenosové funkci vyskytnou komplexně sdružené póly. V časových odezvách (impulsní a přechodová charakteristika) se pak vyskytnou harmonické funkce typu  $\sin$  a  $\cos$ . Pokud kmitavé póly nejsou v přenosové funkci dominantní, nemusí však být kmitavý charakter na časovém průběhu výrazně patrný. Tak například přenosová funkce

$$F_1(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(0.1p + 1)}$$

má komplexní póly  $p_{1,2} = -0.5 \pm 0.866j$  a reálný pól  $p_3 = -10$ . Impulsní odezva, uvedená



**Obrázek 3.3:** Impulsní odezva výrazně kmitavé soustavy

na obrázku 3.3 jasně ukazuje na kmitavý charakter této soustavy, u které oba komplexní póly jsou dominantní. Změníme-li hodnotu časové konstanty stokrát, takže dominantním se nyní stane pól  $p_3 = -0.1$ , bude odezva spíše odpovídat soustavě přetlumené (viz. obrázek 3.4). Z průběhu odezvy je ovšem zřejmé, že se jedná o soustavu vyššího řádu (svědčí o tom tvar odezvy v okolí počátku a též nepravidelnosti v sestupové části charakteristiky).

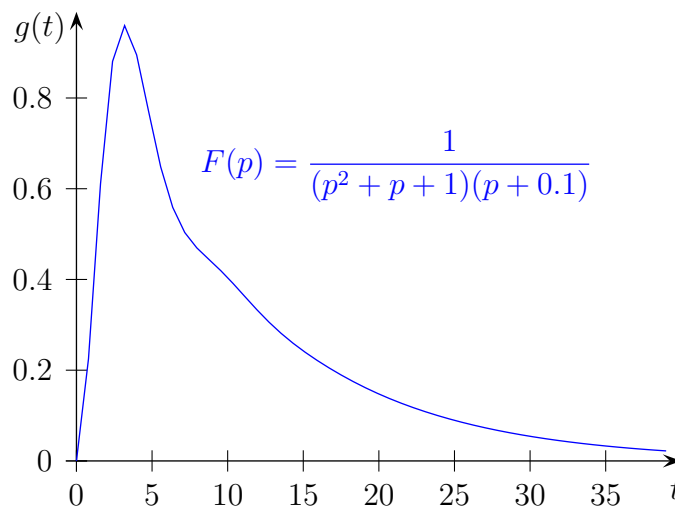
#### Doporučení:

Modelováním v jazyce MATLAB zjistíte, jaký vliv na tvar impulsní odezvy bude mít změna tlumení kmitavé části soustavy při nezměněné reálné části. Ve výše uvedeném příkladě, je  $\Re(p_{1,2}) = -0.5$  a poměrné tlumení je  $\xi = 0.5$ . Pro dvakrát menší tlumení a stejnou hodnotu reálné části pólů platí  $p_{1,2} = -0.5 \pm 1.936j$  a příslušná přenosová funkce (samotné kmitavé části) pak je

$$F_3(p) = \frac{1}{0.25p^2 + 0.25p + 1}$$

Zopakujme, že u kmitavých článků jsou důležité dva parametry: časová konstanta  $T$  a poměrné tlumení  $\xi$ . Přenosová funkce má tvar

$$F(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2T\xi p + 1}$$



**Obrázek 3.4:** Impulsní odezva kmitavého systému s reálným dominantním pólem

Dále jsou definovány tři důležité frekvence:

- vlastní frekvence netlumených kmitů, pro kterou platí  $\omega_0 = \frac{1}{T}$
- vlastní frekvence  $\omega_v$ . Je to frekvence kmitů odezvy a platí pro ni rovnice  $\omega_v = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2}$
- rezonanční frekvence  $\omega_r$ , která udává frekvenci ve které má frekvenční charakteristika rezonanční převýšení. Toto převýšení ovšem vzniká pouze v případě, že poměrné tlumení je menší než 0.7. Pro rezonanční frekvenci platí rovnice  $\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi}$

V soustavách se může vyskytovat i několik kmitavých článků. Celkový charakter soustavy pak záleží tom, který z nich je dominantní, čili ten, jehož póly leží nejbližší imaginární osy (případně nejbližší bodu 1 u diskretních systémů).

### 3.3 Soustavy s astatismem

Jsou charakteristické přítomností pólu přenosové funkce v počátku. Je-li to pól vícenásobný, jde o soustavy s astatismem vyššího řádu. Jejich řízení je velmi obtížné, neboť obvody s takovými soustavami jsou náchylné k nestabilitě. Astatických systémů je v technické praxi celá řada. Jsou to téměř všechny servomotory, jejichž výstupem je poloha nebo úhlové natočení, systémy s akumulací kapalin (nádrže), stranové řízení vozidel, lodí i letadel, apod. I astatické soustavy mohou být přetlumené či kmitavé. Jsou charakteristické tím, že se jejich přechodová charakteristika neustálí na nějaké konstantní hodnotě, nýbrž narůstá do nekonečna. Například přenosová funkce

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

má jeden pól v počátku a proto se jedná o soustavu s astatismem. Někdy zmiňujeme také řád astatismu. Výše uvedený přenos má astatismus prvního řádu.

### 3.4 Soustavy s neminimální fází

Jedná se o soustavy, jejichž přenos má alespoň jednu nulu v pravé polovině komplexní roviny  $p$ . Její přítomnost se projeví ve frekvenčních charakteristikách i v časových odezvách. Ve frekvenčních charakteristikách přestává platit vztah mezi sklonem amplitudové frekvenční charakteristiky a fází, protože fáze již není minimální. Odtud označení těchto systémů. V časové oblasti se nám přítomnost nestabilní nuly projeví počátečním podkmitem přechodové charakteristiky do záporných hodnot. Jako příklad této soustavy můžeme uvést kotel na uhelný prach. Nasypání uhelného prachu do kotle způsobí nejprve jakoby jeho zahašení, což se projeví počátečním poklesem teploty. Po chvíli ale dojde k rozhoření paliva a k nárůstu teploty.

Pokud hledáme diskrétní ekvivalent spojitě soustavy řádu vyššího než druhého v  $Z$  transformaci, potom její ekvivalent vychází prakticky vždycky fázově neminimální. To znamená, že alespoň jedna nula leží mimo jednotkové kružnice.

### 3.5 Identifikace regulovaných soustav

Pro návrh regulátoru potřebujeme obvykle znát matematický model regulované soustavy. Existuje sice několik postupů, které umožňují navrhnout algoritmus řízení bez popisu vlastností soustavy, používáme je však spíše jako krajní řešení v těch případech, kdy formulace matematického modelu je buď nemožná, nebo velmi obtížná. Pro běžné a lineari-zovatelné soustavy však není obvykle příliš obtížné najít alespoň přibližný popis-model. Lze k němu dospět buď analyticky, tj. formulací příslušných diferenciálních či diferenčních rovnic (na základě fyzikálně chemických dějů, které v soustavě probíhají) nebo experimentálně, měřením statických i dynamických vlastností reálného objektu.

Při tomto způsobu identifikace obvykle používáme pro buzení soustavy některý typický signál. Nejčastěji je to skoková změna, nebo harmonický průběh. Třetí standardní časový průběh, totiž jednotkový impuls, je obtížné realizovat a používá se spíše výjimečně. Použijeme-li skok vstupní veličiny, obdržíme jako odezvu přechodovou charakteristiku. To ovšem platí za předpokladu nulových počátečních podmínek a při absenci poruchových signálů (na soustavu kromě vstupní veličiny nepůsobí žádný jiný signál). Budeme-li soustavu budit harmonickým signálem, jehož frekvenci budeme postupně měnit, můžeme měřit zesílení a fázový posun procházejícího signálu a získat tak jednotlivé body frekvenční charakteristiky. S ohledem na praktické podmínky lze doporučit:

- Měření přechodové charakteristiky je vhodné pro soustavy s předpokládanými časovými konstantami v rozmezí jednotek až tisíců sekund; zapisovače pro takové časové průběhy jsou běžně dostupné a realizace dostatečně věrné skokové změny vstupní veličiny je možná. vzorkování mikroprocesorem.
- Měření s použitím harmonického signálu je vhodné spíše pro rychlejší soustavy, neboť po každé změně frekvence je třeba počkat, až dozní přechodný děj vyvolaný touto změnou. Totéž platí v případě, kdy nejsou zaručeny nulové počáteční podmínky. Nevýhodou frekvenčního měření je nutnost předem odhadnout frekvenční rozsah, ve kterém se dynamické vlastnosti soustavy projeví.

Společnou nevýhodou měření přechodové charakteristiky nebo jednotlivých bodů frekvenční charakteristiky je nutnost izolovat soustavu od jiných signálových vlivů. To je možné jen při vyřazení soustavy z běžného provozu. Existuje i řada tzv. "on-line" postupů, které určují potřebný matematický model na základě dlouhodobého měření vstupních a výstupních hodnot. Nejpoužívanější je metoda minima součtu kvadrátů odchylek. Její princip ukážeme na jednoduchém příkladě.

Předpokládejme, že identifikovaná soustava má předpokládaný diskrétní přenos ve tvaru

$$F(z) = \frac{a}{z - b}$$

Diskrétní přenos používáme pro jednoduchost vysvětlení). Úkolem identifikace je určit hodnoty parametrů  $a, b$ . Vstupní veličina je  $x(k)$ , výstupní  $y(k)$ , kde  $k$  je krok diskrétního signálu. Z přenosu plyne, že platí následující rovnice:  $y(k+1) = ax(k) + by(k)$ . Teoreticky by tedy stačilo (za předpokladu nulových počátečních podmínek a absence vlivu působení poruchového signálu) změřit dvě sobě odpovídající dvojice vstupních a výstupních hodnot. Tím získáme dvě rovnice o dvou neznámých ( $a, b$ ), které lze řešit za předpokladu, že matice soustavy rovnic není singulární. To bude splněno, jestliže hodnoty vstupního signálu budou různé. Pokud provedeme větší množství měření, než je nutné pro výpočet neznámých parametrů soustavy, získáme možnost zmenšit vliv nenulových počátečních podmínek i případného poruchového signálu, který si můžeme představit jako chybu prováděných měření. Z teorie signálů je známo, že tento postup bude úspěšný, pokud poruchový signál bude mít určité statistické parametry (např. nulovou střední hodnotu). Podrobné matematické odvození použitých algoritmů přesahuje rámec tohoto kurzu. Dodejme, že nevýhodou této metody je nutnost předem určit tvar matematického modelu (počet neznámých parametrů v čitateli i jmenovateli přenosu). Podobné metody existují i pro stanovení spojitého přenosu. V programu MATLAB je k dispozici několik modifikací metody minima kvadrátů odchylek.

### 3.6 Aproximace regulovaných soustav

Aproximovat, znamená nahradit přesné hodnoty jejich přibližným odhadem. Proces aproximace lze obecně uplatnit na kterýkoliv popis vlastností soustavy:

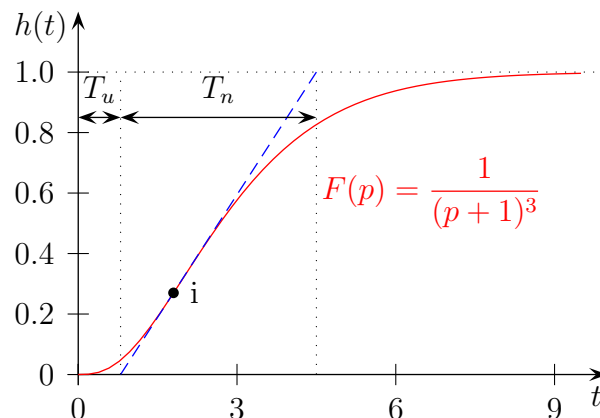
- diferenciální/diferenční rovnici, přesně popisující dynamiku soustavy lze nahradit rovnicí nižšího řádu, nebo jiného tvaru, kterou lze snáze řešit
- frekvenční charakteristiku lze ve zvoleném frekvenčním pásmu nahradit charakteristikou jednoduššího systému
- časovou odezvu (přechodovou nebo impulsní charakteristiku) nahradíme odezvou některého ze zvolených aproximačních systémů (soustav)
- skutečné rozložení nul a pólů nahradíme rozložením, ve kterém budou pouze dominantní póly a nuly.

Poněkud obtížnější je aproximace ve stavovém prostoru, protože jakékoliv zjednodušení znamená přechod z prostoru vyššího rozměru do prostoru nižší dimenze (odpovídá snížení řádu popisující diferenciální/diferenční rovnice).

V praxi se nejčastěji aproximuje změřená přechodová charakteristika charakteristikou zvolené aproximační soustavy. Jde-li o přetlumené soustavy (bez kmitavých členů) používají se tyto typy aproximací:

$$\begin{aligned}
 F_1(p) &= \frac{k}{Tp + 1} e^{-dp} && \text{soustava prvního řádu s dopravním zpožděním} \\
 F_2(p) &= \frac{k}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)} && \text{soustava druhého řádu s různými časovými konstantami} \\
 F_3(p) &= \frac{k}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)} e^{-dp} && \text{soustava druhého řádu s dopravním zpožděním} \\
 F_4(p) &= \frac{k}{(Tp + 1)^n} && \text{soustava } n\text{-tého řádu se stejnými časovými konstantami}
 \end{aligned}$$

K rozhodnutí o typu vhodné aproximace je potřebné znát zejména polohu inflexního bodu  $i$  a velikost parametrů nazývaných doba průtahu  $T_u$  a doba náběhu  $T_n$ . Význam jednotlivých parametrů je zřejmý z obrázku 3.5. Postup určení parametrů jednotlivých aproximací závisí na tvaru aproximačního přenosu. Pro přenos  $F_1(p)$  platí  $T = T_n$  a



**Obrázek 3.5:** Parametry přechodové charakteristiky

$d = T_u$ . Přenos  $F_2(p)$  a  $F_3(p)$  je vhodný pro výšku inflexního bodu menší než 0.264. Pro větší hodnoty je vhodné použít aproximaci přenosem typu  $F_4(p)$ . Řád a velikost časové konstanty určuje Tabulka 3.1. Uvedené hodnoty se vztahují k normovanému tvaru přechodové charakteristiky, tj. se zesílením  $k = 1$ . Skutečnou hodnotu zesílení určíme z poměru velikosti vstupního skoku a rozdílu ustálených hodnot výstupního signálu.

O vhodnosti aproximace se lze přesvědčit srovnáním přechodových charakteristik, nebo porovnáním frekvenčních charakteristik (pokud je k dispozici f.ch.skutečné soustavy).

Řád n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_u/T_n$	0.00	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493	0.570	0.642	0.709
$T_n/T$	1.00	2.718	3.695	4.463	5.119	5.699	6.226	7.144	7.590

**Tabulka 3.1:** Řád a velikost časové konstanty

### 3.6.1 Aproximace dopravního zpoždění

Dopravní zpoždění nemění tvar procházejícího signálu, pouze jej posunuje v čase. Mezi vstupním a výstupním signálem platí rovnice  $y(t) = x(t - d)$ . Podle věty o posunutí v originále lze přímo určit přenos

$$F(p) = e^{-dp}$$

Na rozdíl od ostatních dynamických článků tento přenos není vyjádřen poměrem dvou polynomů. Funkci  $e^x$  však lze vyjádřit pomocí mocninné řady  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$ . Zvolíme následující tvar:

$$F(p) = e^{-dp} = \frac{e^{-0.5dp}}{e^{0.5dp}} = \frac{1 - 0.5dp + \dots}{1 + 0.5dp + \dots}$$

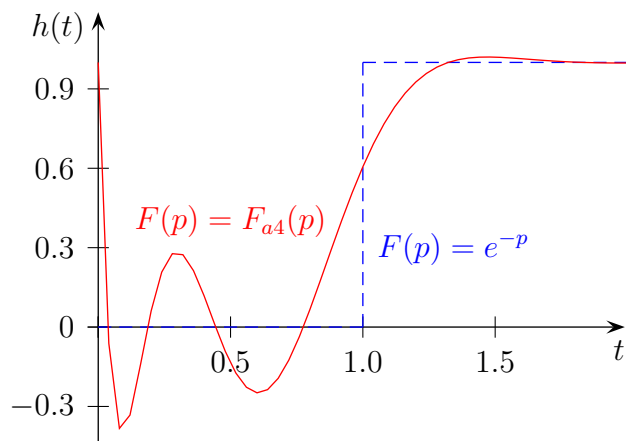
V čitateli i jmenovateli jsou nyní polynomy nekonečného řádu. Přenosová funkce dopravního zpoždění má tedy nekonečně mnoho nul i pólů. Použijeme-li pouze omezený počet členů mocninných řad, dopustíme se jisté nepřesnosti. Aproximace Padého polynomy tyto chyby minimalizuje vhodnou volbou koeficientů u jednotlivých mocnin operátoru  $p$ . Hodnoty závisí na řádu aproximačních polynomů (tj. na počtu členů mocninné řady). Tak pro třetí řád platí:

$$F_{a3}(p) = \frac{-p^3 + 12d^2p^2 - 60dp + 120}{p^3 + 12d^2p^2 + 60dp + 120} \quad (3.1)$$

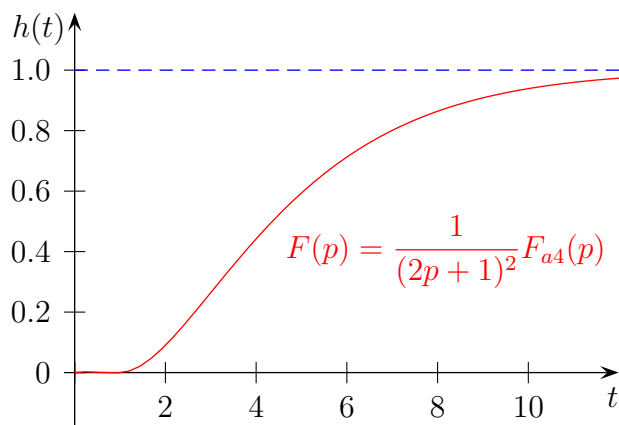
a pro aproximační polynomy čtvrtého řádu:

$$F_{a4}(p) = \frac{p^4 - 20d^3p^3 + 180d^2p^2 - 840dp + 1680}{p^4 + 20d^3p^3 + 180d^2p^2 + 840dp + 1680} \quad (3.2)$$

Je zřejmé, že platí:  $\lim_{p \rightarrow 0} F_{an}(p) = 1$ , kdežto pro  $p \rightarrow \infty$  je limita rovna  $+1$  pro sudé počty členů  $n$  aproximace a  $-1$  pro liché. Tato náhrada přenosové funkce dopravního zpoždění je nutná při práci v jazyce MATLAB nebo SIMULINK, pokud se zpoždění vyskytuje ve zpětné vazbě, nebo je v systému více členů s různými hodnotami zpoždění  $d$ . Kvalita aproximace stoupá, pokud je v sérii s dopravním zpožděním zapojen dynamický článek typu dolnofrekvenční propusti (vyšší frekvence, na kterých se aproximační charakteristika značně liší od skutečnosti, jsou tlumeny). Na obrázku 3.6 je přechodová charakteristika samotné aproximace Padého rozvojem 4.řádu. Nahrazované dopravní zpoždění má hodnotu  $d = 1$ . Na obrázku 3.7 je uvedena aproximace systému druhého řádu se stejnými časovými konstantami velikosti  $T = 2s$  a dopravním zpožděním  $d = 1$ . Použita je stejná aproximace Padeho rozvojem 4.řádu. Je patrné, že aproximace dopravního zpoždění je nyní podstatně věrnější.



Obrázek 3.6: Přejchodová charakteristika Padého aproximace 4. řádu



Obrázek 3.7: Přejchodová charakteristika systému 2. řádu s dopravním zpožděním realizovaným Padého aproximací



### 3.6.2 Využití programu Matlab

Definujme si v programu Matlab přenos druhého řádu  $F(p) = \frac{1}{(2p+1)^2}e^{-p}$ .

```
>> Fp = zpke([], [-0.5 -0.5], 0.25)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
0.25
```

```
-----  
(s+0.5)^2
```

Nadefinovali jsme si přenos  $F_p$  zatím bez dopravního zpoždění, u které ale můžeme nastavovat další parametry. Které to jsou, se dozvíme pomocí příkazu

```
>> get(Fp)
```

```
z: {[0x1 double]}  
p: {1x1 cell}  
k: 0.25  
Variable: 's'  
DisplayFormat: 'roots'  
Ts: 0  
ioDelay: 0  
InputDelay: 0  
OutputDelay: 0  
InputName: {' '  
OutputName: {' '  
InputGroup: {0x2 cell}  
OutputGroup: {0x2 cell}  
Notes: {}  
UserData: []
```

Pro zadání velikosti dopravního zpoždění jsou pro nás zajímavé parametry `InputDelay` a `OutputDelay`. Můžeme tedy umístit dopravní zpoždění na vstup nebo na výstup. Řekněme, že v našem případě působí dopravní zpoždění na výstupu.

```
>> set(Fp, 'OutputDelay', 1)
```

```
>> Fp
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
0.25
```

```
exp(-1*s) * -----  
(s+0.5)^2
```

Takto nadefinovaný přenos můžeme použít například pro vykreslení přechodové, impulsové, či frekvenční charakteristiky. Nemůžeme ji bohužel použít například v příkazu `feedback`. Pro tento případ musíme použít Padého aproximaci dopravního zpoždění. Ta je v programu Matlab podporována příkazem `pade`.

```
>> Fpapp = pade(Fp,4)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
0.25 (s^2 - 11.58s + 36.56) (s^2 - 8.415s + 45.95)
```

```
-----  
(s+0.5)^2 (s^2 + 11.58s + 36.56) (s^2 + 8.415s + 45.95)
```

Tímto příkazem jsme převedli systém s dopravním zpožděním na systém, kde se již dopravní zpoždění implicitně nevyskytuje, protože je nahrazeno Padého aproximací (v tomto případě 4. řádu). Tento tvar přenosu je již samozřejmě přípustný i pro příkaz `feedback`.

Příkaz `pade` lze použít i pro získání Padého aproximace libovolného řádu pouze dopravního zpoždění (bez zadání systému)

```
>> [n,d]=pade(1,3)
```

```
n =
```

```
-1    12   -60   120
```

```
d =
```

```
1    12    60   120
```

Tento příkaz vrátil čitatel a jmenovatel Padého aproximace dopravního zpoždění  $d = 1$  (první parametr) 3. řádu (druhý parametr). Srovnajte výsledek s koeficienty přenosu (3.1). Bez použití parametrů na pravé straně nakreslí v grafu přechodovou a frekvenční charakteristiku zvolené aproximace.

```
>> pade(1,4)
```

Srovnajte vykreslenou přechodovou charakteristiku s obrázkem 3.6.

### 3.7 Shrnutí

Před tím, než se můžeme pustit do návrhu regulátoru, se musíme pokusit získat co možná nejvíce informací o soustavě, kterou chceme řídit. V této kapitole jsme se dozvěděli, že informací o soustavě může být znalost typu regulované soustavy. Soustavy mohou být přetlumené nebo kmitavé, statické nebo astatické, fázově minimální nebo neminimální, s dopravním zpožděním nebo bez dopravního zpoždění, případně jejich kombinace. Naučili jsme se jak rozpoznat daný typ soustavy z naměřené přechodové, impulzní nebo frekvenční charakteristiky. V druhé části této kapitoly bylo ukázáno několik možností identifikace regulovaných soustav. Jako apriorní informace identifikace často vstupuje zjištěný typ soustavy. Výsledkem identifikace je přenos soustavy. V některých případech je skutečný přenos soustavy vysokého řádu. Většinou nepotřebujeme znát přenos vysokého řádu a proto si vystačíme s aproximací některým typem přenosu. Nakonec jsme si probrali aproximaci dopravního zpoždění. Přítomnost dopravního zpoždění nám znemožňuje použít pravidla pro

blokovou algebru. Použitím Padého aproximace se obraz dopravního zpoždění převede na podíl kořenových činitelů. Ikdyž je tato aproximace platná pouze v oblasti dolních kmitočtů, tak většinou postačuje, protože se v sérii s dopravním zpožděním vyskytuje dynamický systém, který nám vysoké kmitočty vyfiltruje a sníží tím vliv chyby aproximace.

### 3.8 Kontrolní otázky

**Otázka 3.1** *Jaké typy regulovaných soustav znáte s ohledem na tvar přechodové charakteristiky?*

**Otázka 3.2** *Vysvětlete proces diskretizace spojité soustavy*

**Otázka 3.3** *Co je podmínkou kmitavosti soustavy?*

**Otázka 3.4** *Co jsou to dominantní póly?*

**Otázka 3.5** *Vysvětlete proces identifikace.*

**Otázka 3.6** *Co je to Padého aproximace, k čemu a proč se používá.*

**Otázka 3.7** *Je Padého aproximace fázově minimální?*

**Otázka 3.8** *Napište libovolný přenos fázově neminimálního systému.*

**Otázka 3.9** *Napište libovolný přenos přetlumeného systému s astatismem prvního řádu a nakreslete jeho přechodovou charakteristiku.*

**Otázka 3.10** *Napište libovolný přenos kmitavého systému s astatismem druhého řádu a nakreslete jeho impulsovou charakteristiku.*

## 4 Regulátory

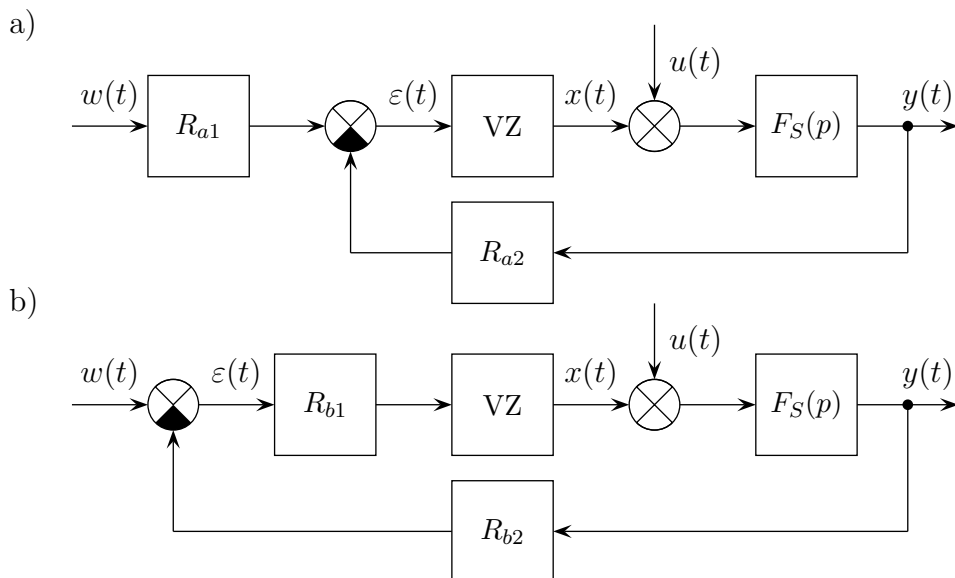
Regulátor působí pomocí akční veličiny na soustavu tak, aby regulační odchylka byla co nejmenší. V tomto širším smyslu je regulátor složen z celé řady dalších částí. Podle obrázku 1.3 je to nejen ústřední člen regulátoru, který určuje regulační zákon (též algoritmus řízení), ale i výkonový zesilovač, měřicí člen a převodník vstupní veličiny. Měřicí člen -čidlo - zahrnujeme nejčastěji do přenosu soustavy a výkonový zesilovač i vstupní převodník jsou z dynamického hlediska proporcionální členy. Z hlediska kvality regulace je nejdůležitější částí jeho ústřední člen. Ostatní členy mají více méně standardní vlastnosti, dané konstrukčními principy a možnostmi. Proto pokud kreslíme blokové schéma regulačního obvodu v té nejjednodušší formě (obrázek 1.2), je středem našeho zájmu právě návrh ústředního členu.

V praxi se nejčastěji používají regulátory, které jsou složené ze tří základních složek. Jedná se o proporcionální, integrační a derivační složku. Tím vznikají různé typy jednoduchých regulátorů, až po PID regulátor. U regulátorů PD a PID se musí zajistit realizovatelnost, což se provádí použitím časové konstanty, která se většinou volí o dva řády nižší, než jsou časové konstanty v čitateli regulátoru.

V této kapitole se stejně jako v celém skriptu zabýváme pouze lineárními systémy, tedy lineárními regulátory. V praxi jsou bohužel všechny regulátory nelineární z důvodu omezení akčního zásahu. Omezení akčního zásahu ve spojení s I složkou regulátoru se nám nepříznivě projeví na prodloužení přechodného děje z důvodu wind-up efektu. O těchto problémech a jejich řešení se podrobně seznámíte v navazujících kurzech.

Uspořádání podle obrázku 1.2 (nebo obrázku 1.3) není jediná možná struktura zpětnovazební regulace, i když je nejčastější. Je to struktura typická pro systémy typu servomechanizmu, tedy případ vlečné regulace. V těchto případech je důležitý buď dokonalý přenos řídicí veličiny, zatímco kompenzace poruch, vzhledem k menší četnosti jejich výskytu, není tak podstatná, nebo je tomu naopak; důležitá je kompenzace poruch a přenos řídicí veličiny, s ohledem na to, že tato je po většinu doby konstantní, není podstatný. Společným znakem těchto systémů je to, že neklademe současně požadavky na obě základní funkce zpětnovazebního řídicího obvodu. Pak nám struktura podle obrázku 1.2 plně vyhoví. Protože můžeme splnit pouze jeden z několika možných požadavků, označuje se obvod na obrázku 1.2 jako regulační obvod s jedním stupněm volnosti. Požadavky na oba přenosy, řízení i poruchy, můžeme splnit daleko dokonaleji podle struktury, která je nakreslena na obrázku 4.1 a) nebo 4.1 b). Jak lze snadno dokázat, oba obvody jsou co do vlastností stejné a lze je navzájem transformovat. (Konkrétní přenosy  $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$  a  $R_{b1}$ ,  $R_{b2}$  jsou ovšem rozdílné.) Blok VZ je výkonový zesilovač. Je třeba zdůraznit, že signál  $\varepsilon(t)$  není totožný s regulační odchylkou  $e(t) = w(t) - y(t)$ . Obvody tohoto typu nazýváme *se dvěma stupni volnosti*, neboť umožňují současné splnění dvou skupin požadavků. Jejich realizace analogovými prostředky však je poněkud obtížná a nejsou proto běžně užívány. Zcela běžné jsou v případech číslicového řízení.

V následujících kapitolách tohoto skriptu však budeme předpokládat uspořádání podle obrázku 1.2, tedy jediný sériový regulátor. Ve zvláštních případech změnu výslovně uvedeme. Ve shodě s obvyklou praxí také budeme pojem regulátor používat ve smyslu ústřední člen.



Obrázek 4.1: Regulační obvody se dvěma stupni volnosti

Podle druhu energie, která napájí samotný regulátor, rozeznáváme

- přímočinné regulátory, které nemají vlastní zdroj energie a ke své činnosti využívají pouze energii odebíranou z regulované soustavy. Do této skupiny patří velká většina jednoduchých průmyslových regulátorů, zvláště regulátory teploty, hladiny, vlhkosti a polohy. Tyto regulátory jsou většinou nelineární, akční veličina může nabývat pouze omezený počet hodnot (často pouze dvě: zapnuto - vypnuto). Jsou to známé “reléové” regulátory, používané v žehličkách, ledničkách, splachovačích, automatických nabíječkách a pod. Přestože to jsou zařízení velmi laciná a jednoduchá, dosahovaná kvalita regulace může být až překvapivě dobrá a pro řadu aplikací plně vyhoví. Protože se jedná o nelineární obvody, bude tato problematika probrána v navazujícím kurzu.
- regulátory s pomocným zdrojem energie. Zde jde o složitější zařízení, jehož jádrem je vždy zesilovač. Dosahovaná kvalita regulace je podstatně vyšší, úměrně nákladům a složitosti. Statické vlastnosti těchto regulátorů považujeme v určitém pracovním rozsahu za lineární. Akční veličina je samozřejmě omezena fyzikálními možnostmi; v rámci tohoto skriptu však tato omezení nebudeme uvažovat (to znamená, že odvozené vlastnosti budou platit pro vymezené pásmo regulační odchylky).

## 4.1 Nejčastější přenosy spojitých regulátorů

Základním a nejjednodušším regulátorem je regulátor proporcionální, u něhož je akční veličina přímo úměrná velikosti regulační odchylky. Označujeme jej jako P-regulátor. Častým požadavkem na regulátor je zajištění nulové ustálené odchylky. Jak bude ukázáno dále, P-regulátor není schopen zajistit nulovou ustálenou odchylku pro nenulovou konstantní žádanou hodnotu pro statické soustavy, stejně tak pro poruchu působící na vs-

tu soustavy. Tento požadavek lze splnit použitím integračního regulátoru (I-regulátor). Někdy se předchozí dva regulátory sloučí, čímž vznikne PI-regulátor. Použití I- složky bohužel zhoršuje dynamické vlastnosti. Zpomaluje totiž přechodný děj. Ve snaze zrychlit přechodný děj je nutné předvídat chování výstupu soustavy. Z matematiky víme, že pro aproximaci funkce v okolí pracovního bodu používáme Taylorovu řadu, kde se vyskytují derivace této funkce. Víme také, že čím větší množství derivací známe, tím je aproximace přesnější. V regulátorech používáme pro zrychlení odezvy regulační smyčky derivaci odchylky, resp. výstupu. Je zřejmé, že samotný derivační regulátor nespĺňuje požadavky na regulační děj, protože nezajišťuje vyregulování na nízkých frekvencích. Proto se používá v kombinacích s proporcionalní a integrační složkou, kde jí říkáme derivační složka (D-složka). Tím získáváme regulátor proporcionalně derivační PD a proporcionalně derivačně integrační PID. Derivace vyšších řádů obvykle nepoužíváme, protože jsou často obtížně počítatelné z důvodu působícího šumu. Výše popsané regulátory vytvářejí skupinu používaných lineárních spojitých regulátorů, jejichž vlastnosti a chování v uzavřeném obvodu se budeme zabývat v následujících podkapitolách. Syntézou, čili nastavením jejich parametrů za účelem dosažení požadovaných dynamických vlastností bude náplní kapitoly 8. Nyní se blíže seznámíme s jednotlivými typy regulátorů. Jejich základní charakteristiky, t.j. frekvenční charakteristiky a přechodová charakteristika jsou znázorněny na obrázcích 4.4, 4.5 a 4.3.

**P-regulátor** Mezi akční veličinou a regulační odchylkou platí přímá úměra  $x(t) = r_0 e(t)$ , takže přenos je

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 = K_R \quad (4.1)$$

**I-regulátor** Pro časové průběhy platí vztah

$$x(t) = r_i \int_0^t e(t) dt + x(0)$$

Tomu odpovídá přenos

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = \frac{r_i}{p} = \frac{1}{T_i p} \quad (4.2)$$

Stejně jako u každého regulátoru můžeme pro vyjádření přenosu použít zesílení  $r_i$  nebo časovou konstantu  $T_i$ , která je rovna převrácené hodnotě zesílení  $T_i = 1/r_i$

**PD-regulátor** Výstupní veličina regulátoru (akční veličina) je složena ze dvou složek, z nichž jedna je úměrná regulační odchylce a druhá její derivaci. Konstanty úměrnosti jsou  $r_0$  a  $r_d$

$$x(t) = r_0 e(t) + r_d \frac{de(t)}{dt}$$

takže přenos

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 + r_d p = K_R(T_D p + 1) \quad (4.3)$$

Poslední výraz v rovnici (4.3) je jiné vyjádření přenosu pomocí zesílení a časové konstanty. Platí

$$K_R = r_0 \quad T_D = \frac{r_d}{r_0}$$

Všimněme si, že přenos (4.3) nesplňuje podmínku fyzikální realizovatelnosti, protože v čitateli přenosu je polynom vyššího řádu než ve jmenovateli. Touto otázkou se budeme zabývat v dalším textu. Plocha impulsu na začátku přechodové charakteristiky je rovna koeficientu  $r_d$ .

**PI-regulátor** Podobně jako v předchozím případě jsou ve výstupní veličině zastoupeny dvě složky. Jak vyplývá z názvu, jedná se o proporcionální a integrační. Pro časové průběhy platí:

$$x(t) = r_0 e(t) + r_i \int_0^t e(t) dt + x(0)$$

takže přenos

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 + \frac{r_i}{p} = k_r \frac{T_r p + 1}{p} = \frac{T_r p + 1}{T_i p} \quad (4.4)$$

Mezi konstantami pro různé formy přenosu regulátoru v rovnici (4.4) platí tyto vztahy

$$k_r = r_i = \frac{1}{T_i} \quad T_r = \frac{r_0}{r_i} \quad r_0 = \frac{T_r}{T_i}$$

**PID-regulátor** Tento nejsložitější ze základních typů regulátorů má ve výstupním signálu obsaženy všechny tři složky, které jsme dosud poznali:

$$x(t) = r_0 e(t) + r_d \frac{de(t)}{dt} + r_i \int_0^t e(t) dt + x(0)$$

takže přenos má tři členy

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 + \frac{r_i}{p} + r_d p = K_R \left( 1 + T_D p + \frac{1}{T_I p} \right) = k_r \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p} \quad (4.5)$$

Mezi konstantami pro různé formy přenosu regulátoru v rovnici (4.5) platí tyto vztahy

$$K_R = r_0 \quad T_D = \frac{r_d}{r_0} \quad T_I = \frac{r_0}{r_i} \quad k_r = r_i \quad T_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_I T_D}$$

Velmi častý je druhý tvar, kde jednotlivé konstanty mají tyto, v praxi často používané názvy:  $K_R$  zesílení,  $T_D$  derivační složka,  $T_I$  integrační složka. Tento tvar je též vhodný pro

praktickou realizaci PID regulátoru, protože umožňuje vypořádat se s problémy, které přináší omezení akčního zásahu, jak se dozvíte v některém z navazujících kurzů (zde se zabýváme pouze lineárními systémy). Z rovnice 4.5 je patrné, že poslední člen není zcela rovnocenný předchozím členům, neboť předpokládá pouze reálné časové konstanty. Předchozí členy totiž umožňují zvolit konstanty tak, že nuly přenosu  $F_R(p)$  budou komplexní (např.  $T_I < 4T_D$ ). Jak bude ukázáno později v kapitole 8 o syntéze regulátorů, nejsou komplexní kořeny v čitateli regulátoru výhodné. Proto lze poslední tvar přenosu 4.5 používat bez újmy na praktické obecnosti.

Místo zesílení  $r_0$  se v praxi často používá pojem pásmo proporcionality, které je uváděno v procentech a platí

$$pp = \frac{1}{r_0} 100 [\%]$$

Udává, jaká změna v procentech je nutná ke změně výstupní veličiny regulátoru v celém rozsahu. Vyskytuje se zde tedy nelineární omezení akční veličiny.

Poznamenejme ještě, že tento tvar regulátoru opět nesplňuje podmínku fyzikální realizovatelnosti.

**Reálný PD a PID regulátor** Regulátory PD a PID popsané výše nesplňují podmínku fyzikální realizovatelnosti. V praxi jsou jejich přenosové funkce doplněny o setrvačný člen s časovou konstantou  $\varepsilon$ , která se nazývá realizační časová konstanta. Vzniknou tak reálné přenosové funkce PD a PID regulátoru, které mají následující tvary: Reálný PD regulátor

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = K_R \frac{T_D p + 1}{\varepsilon p + 1} \quad \text{kde } \varepsilon \ll T_D$$

Reálný PID regulátor

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = K_R \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(\varepsilon p + 1)} \quad \text{kde } \varepsilon \ll T_1, T_2$$

realizační konstanta je tedy volena tak, aby co nejméně ovlivňovala chování ideálních regulátorů. V některých případech je realizační časová konstanta přítomna již z konstrukčních důvodů regulátoru. Není-li tomu tak, je nutné ji do regulátoru úmyslně zapojit. Jinak totiž stoupající amplitudová charakteristika způsobí velké zesílení šumu a poruch s obsahem vyšších frekvencí, což je nevhodné z hlediska životnosti akčních členů. Tyto šумы a poruchy mohou v některých případech znemožňovat použití derivační složky vůbec.

#### 4.1.1 Realizace základních typů spojitých regulátorů

Analogové řízení je pomalu vytlačováno v průmyslových aplikacích číslicovými regulátory. Přesto se setkáme s případy, kdy je nutné použít analogový PID regulátor. Jedná se o případy, kdy

- požadujeme široké frekvenční pásmo (většinou elektricky realizovaný ústřední člen regulátoru)



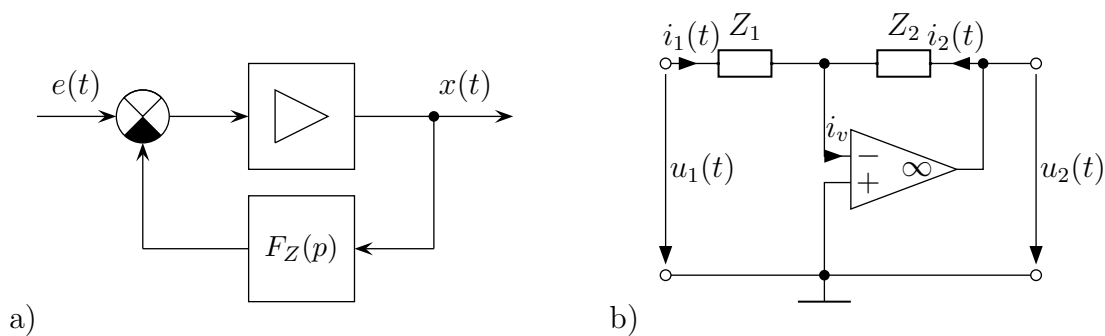
- realizujeme řídicí algoritmy ve výbušném prostředí (ústřední člen regulátoru na pneumatickém principu)
- navýšení ceny vzniklé použitím číslicového řešení není kompenzováno dodatečnými funkcemi (snadné nastavení konstant regulátoru, monitorování průběhů, ...)

Základem elektrického ústředního členu je operační zesilovač. Předpokládáme, že ten se svými vlastnostmi blíží ideálnímu operačnímu zesilovači, který má zesílení blízké nekonečnu  $K \rightarrow \infty$  pro všechny kmitočty. Potom je vstupní proud  $i_v = 0$  a napětí na vstupních svorkách nulové (virtuální nula).

Operační zesilovače se používají v zapojení se zápornou zpětnou vazbou (obrázek 4.2 a)). Celkový přenos tohoto zapojení je

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + KF_Z(p)} = \frac{1}{\frac{1}{K} + F_Z(p)} \doteq \frac{1}{F_Z(p)}$$

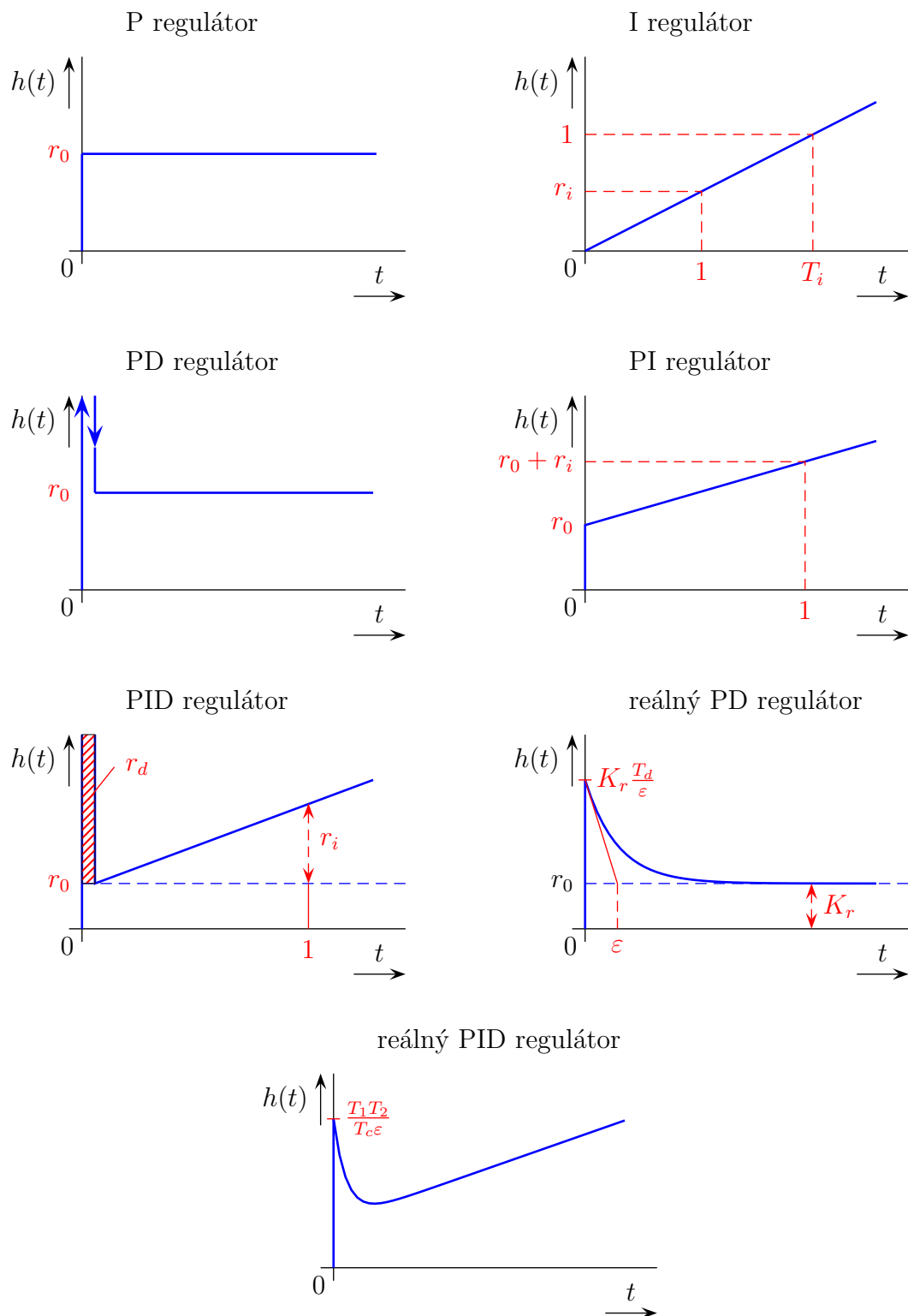
Přibližná rovnost platí za předpokladu  $K \rightarrow \infty$ . Znamená to, že přenosové vlastnosti regulátoru jsou plně určeny převrácenou hodnotou přenosu ve zpětné vazbě.



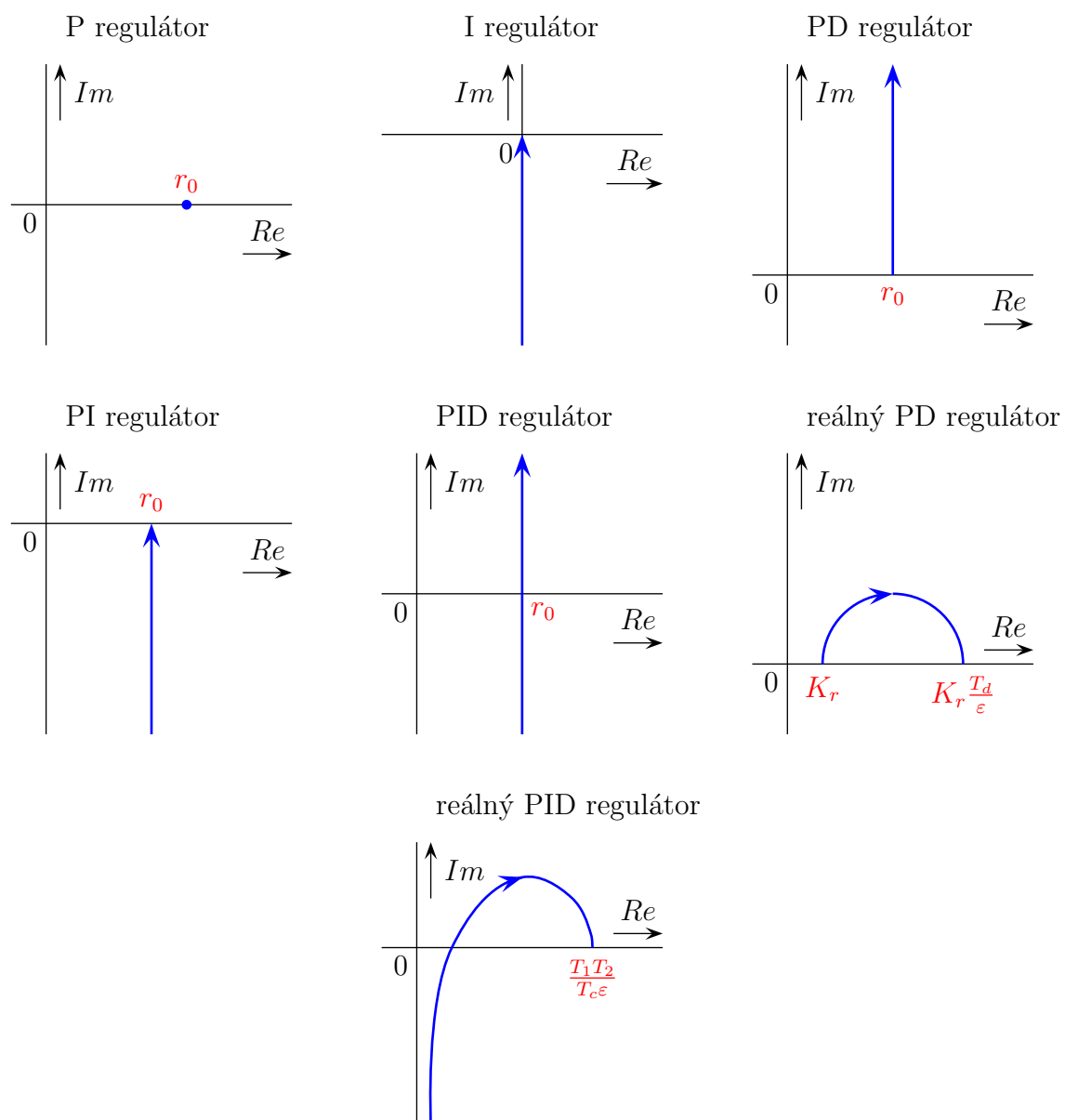
**Obrázek 4.2:** Obecné schéma zapojení s operačním zesilovačem

## 4.2 Výkonové členy regulátorů

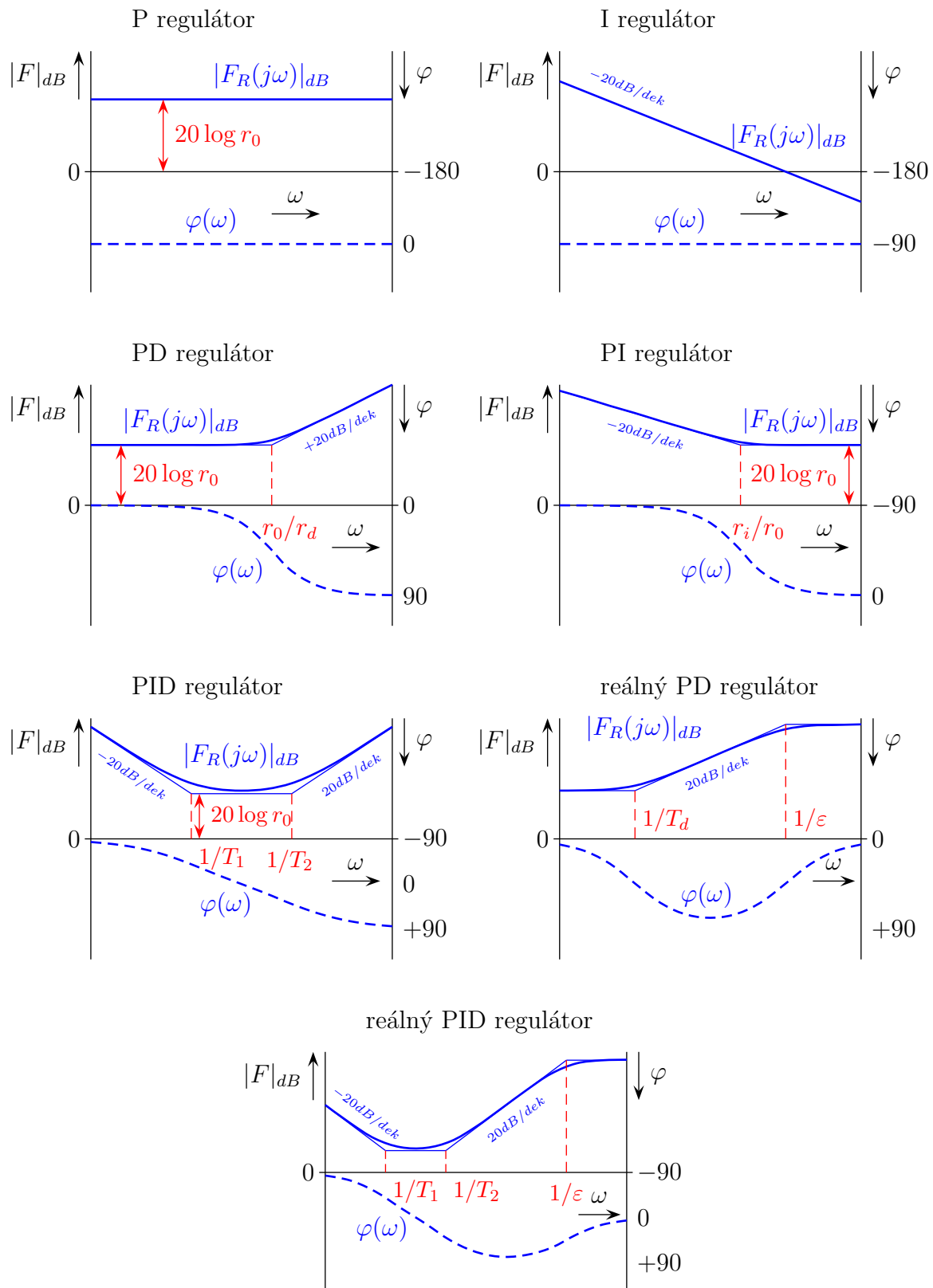
Lineární regulátory, popsané v předcházejícím odstavci, realizují požadované frekvenční filtry, kterými dosahujeme potřebné vlastnosti regulačního děje. Výstupy těchto článků, ať už se jedná o zapojení s aktivními nebo pasivními prvky, však nelze výkonově zatížit. Akční veličina působící na regulovanou soustavu však musí mít určitý výkon, a proto signál, který získáme z ústředního členu, musíme ještě výkonově zesílit. Z dynamického hlediska by ovšem bylo nejlépe, kdyby se tento výkonový zesilovač choval jako proporcionální článek. Úloha realizace výkonového zesilovače je poměrně jednoduchá, pokud akční veličina je elektrický proud nebo napětí. Dříve hojně používané rotační zesilovače (anplidyn, regulex, rototrol a další), jakož i různé typy magnetických zesilovačů byly v novějších zařízeních nahrazeny zesilovači s polovodičovými výkonovými prvky (výkonové tranzistory, tyristory, triaky). Bývají též označovány jako řízené usměrňovače nebo měniče. Pro aplikace s jednou polaritou ovládacího napětí (proudu) se používají jednodušší zapojení, ve kterých je řízený prvek zapojen v sérii se zátěží. V případě, kdy se požaduje změna



**Obrázek 4.3:** Přechodové charakteristiky jednotlivých typů regulátorů P, I, PD, PI, PID, reálný PD a reálný PID regulátor



**Obrázek 4.4:** Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině jednotlivých typů regulátorů P, I, PD, PI, PID, reálný PD a reálný PID regulátor

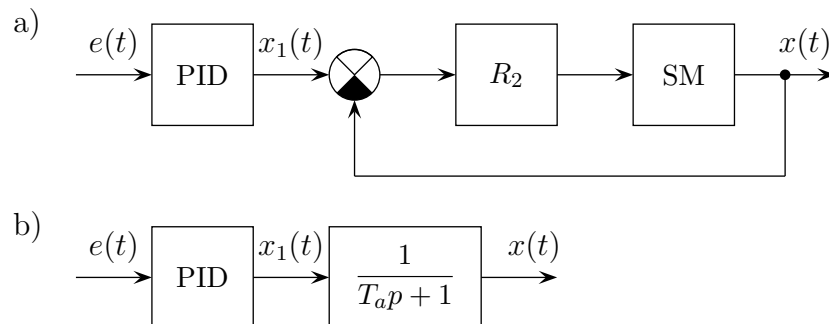


**Obrázek 4.5:** Amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky jednotlivých typů regulátorů P, I, PD, PI, PID, reálný PD a reálný PID regulátor

polarity akční veličiny, používají se můstková zapojení. Podle typu napájecího napětí rozlišujeme jednofázová nebo třífázová zapojení s jedno nebo dvoucestným usměrněním. Podle počtu fází a typu usměrnění se řídí zpoždění mezi vstupním napětím (t.j. výstupem frekvenčně korigujícího regulátoru) a výkonově zesíleným napětím - akční veličinou. Obvykle pro dynamické vlastnosti výkonového zesilovače popisujeme setrvačným článkem s časovou konstantou řádu  $10^{-2}$ s. Pro většinu průmyslových soustav, jejichž časové konstanty jsou podstatně větší, můžeme toto zpoždění zanedbat. Výjimku tvoří mechanické pohony jednotky.

Pokud je akční veličina jiného než elektrického typu, např. tlak vzduchu nebo oleje v pneumatických či hydraulických systémech, je třeba použít příslušný převodník elektrického signálu na signál požadovaného typu. Dynamické vlastnosti pak závisí na typu konstrukce.

Zvláštní - a velmi častý - případ tvoří takové systémy, u kterých je akční veličina mechanická, t.j. posunutí, nebo úhlové natočení. Akční orgán je tedy servomotor s přímočarým, nebo kruhovým pohybem výstupní části. Servomotor s polohovým výstupem se chová jako integrační článek se setrvačností. Tuto skutečnost musíme vzít v úvahu a jeho přenos zahrnout do přenosu regulované soustavy. Pokud je z nějakého důvodu nežádoucí přítomnost integračního členu v akčním orgánu, použijeme zapojení naznačené na obrázku 4.6 a). Signál regulační odchylky  $e(t)$  je zpracován v lineárním regulátoru PID, který produkuje



**Obrázek 4.6:** Regulační obvod se servomechanizmem

signál akční veličiny  $x_1(t)$ . Tento signál představuje žádanou hodnotu pro tzv. malou vnitřní smyčku, což je polohový servomechanismus, tvořený regulátorem  $R_2$  a servomotorem SM. Výstupem servomotoru je skutečná akční veličina  $x(t)$  ve formě mechanického posunutí nebo natočení. Regulátor malé smyčky  $R_2$  musí být navržen tak, aby byla co nejdokonaleji splněna podmínka  $x(t) = x_1(t)$ . Za předpokladu, že přenos servomotoru je

$$F_{SM}(p) = \frac{K_v}{p(T_m p + 1)}$$

a regulátor  $R_2$  je lineární, typu PD s přenosem

$$F_{R2}(p) = K_R(T_m p + 1)$$

je celkový přenos malé smyčky ve tvaru

$$F_a(p) = \frac{F_{R2}(p)F_{SM}(p)}{1 + F_{R2}(p)F_{SM}(p)} = \frac{K_R K_v}{p + K_R K_v} = \frac{1}{T_a p + 1} \quad \text{kde } T_a = \frac{1}{K_R K_v}$$

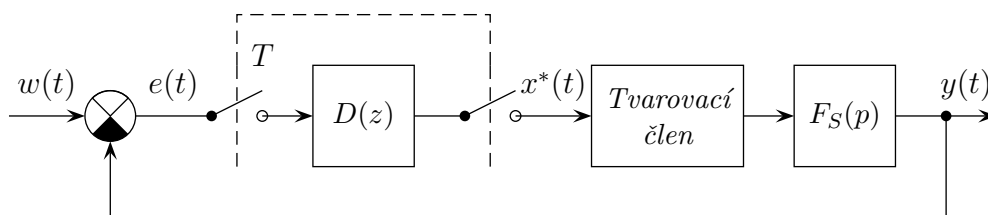
Celý obvod akčního členu (servopohonu) má tedy přenos jako setrvačný článek s časovou konstantou úměrnou převrácené hodnotě zesílení regulátoru a rychlostní konstanty servomotoru. Náhradní blokové schéma je na obrázku 4.6 b). Tyto úvahy platí ovšem v ideálním případě, kdy jsou splněny všechny výše uvedené předpoklady. Ve skutečnosti tomu tak není. Tak např. PD regulátor v ideálním tvaru nelze - jak víme - realizovat. Proto přenos akčního orgánu se servomotorem mívá složitější tvar.

Uvedená struktura regulátoru s akčním členem je v průmyslových regulacích tak častá, že sériově vyráběné regulátory lineárního typu PID již většinou mají potřebný druhý regulátor  $R_2$  zabudován a na vstupní svorky se přivádí nejen signál od čidla regulované soustavy, ale též signál od snímače polohy výstupu servomotoru. Bývá označen “čidlo servopohonu”. Dodejme, že z hlediska teorie automatického řízení patří tento typ regulace do skupiny rozvětvených regulačních obvodů, o kterých bude pojednáno ve zvláštní kapitole.

### 4.3 Diskrétní regulátory

Diskrétní regulátory jsou obvykle popsány diskrétní přenosovou funkcí  $D(z)$ . Zde ukážeme vztah mezi touto přenosovou funkcí a programem číslicového procesoru, kterým je obvykle diskrétní regulátor realizován. Přenos regulátoru z obrázku 4.7 je

$$D(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_k z^{-k}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_k z^{-k}}$$



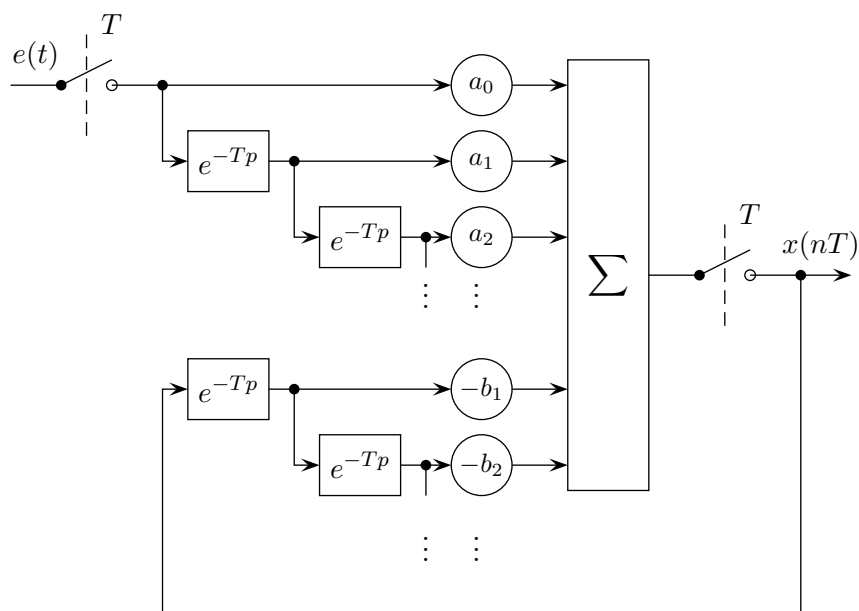
**Obrázek 4.7:** Regulační obvod s diskrétním regulátorem

Pro hodnoty akční veličiny v čase  $t_n = nT$  vypočítáme z předchozí rovnice pomocí zpětné transformace vztah:

$$x(nT) = a_0 e(nT) + a_1 e[(n-1)T] + a_2 e[(n-2)T] + \dots + a_k e[(n-k)T] - b_1 x[(n-1)T] - b_2 x[(n-2)T] - \dots - b_k x[(n-k)T] \quad (4.6)$$

Okamžitá hodnota akční veličiny  $x(nT)$  je dána součtem  $k+1$  vzorků odchylky, násobených koeficienty  $a_0$  až  $a_k$  a  $k$  předcházejících hodnot akční veličiny, násobených koeficienty  $b_1$

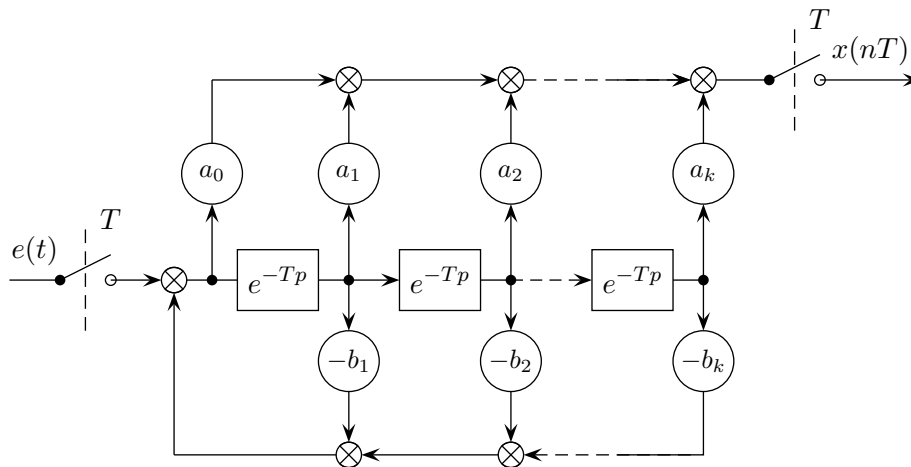
až  $b_k$ . Blokové schéma na obrázku 4.8 znázorňuje tvorbu programu počítače, kterým je realizován požadovaný řídicí algoritmus. Pro realizaci je třeba  $2k + 1$  násobení a  $2k$  buněk pro pamatování přecházejících hodnot. Obsah buněk se v každé periodě posouvá. Toto schéma lze překreslit do tvaru uvedeného na obrázku 4.9. Proti předchozímu způsobu programování zde uspoříme polovinu paměťových buněk.



Obrázek 4.8: Blokové schéma tvorby programu počítače

#### 4.4 Shrnutí

V této kapitole jsme rozebrali základní složky jednoduchých regulátorů, kterými jsou proporcionální, integrační a derivační složka. Popsali jsme si vlastnosti jednoduchých regulátorů a jejich popis v časové a frekvenční oblasti. Proporcionální složka je nej-jednodušší. Její zvyšování vede postupně ke zrychlování přechodného děje a ke snižování zásob stability, o kterých se zmíníme v kapitole o analýze dynamických vlastností regulačních obvodů. Integrační složka má destabilizující charakter. Důvod jejího použití je odstranění trvalé ustálené odchylky při změně řízení či poruchy. Zpomaluje přechodný děj, protože přispívá ke změně fáze o  $-\pi/2$ . Derivační složka má obrácené účinky. Stabilizuje přechodný děj (posun fáze o  $\pi/2$ ) a zrychluje ho, což je hlavním důvodem jejího použití. V případě přítomnosti šumu měření derivační složka tento šum zesiluje. To může vést ke zvýšenému opotřebení akčního členu. Tento nežádoucí jev může znemožnit použití derivační složky. Konec tohoto shrnutí obsahuje některé závěry, jejichž platnost vyplyne z probrání několika následujících kapitol. Jsou zde uvedeny proto, že jsou velmi důležité pro správnou volbu typu regulátoru.



Obrázek 4.9: Úspornější blokové schéma tvorby programu počítače

## 4.5 Kontrolní otázky

**Otázka 4.1** *Napište přenosy jednotlivých jednoduchých typů regulátorů.*

**Otázka 4.2** *Nakreslete přechodové charakteristiky jednotlivých jednoduchých typů regulátorů a popište je s ohledem na jejich vyjádření pomocí přenosů.*

**Otázka 4.3** *Nakreslete frekvenční charakteristiky jednotlivých jednoduchých typů regulátorů a popište je s ohledem na jejich vyjádření pomocí přenosů.*

**Otázka 4.4** *Co je to realizační konstanta regulátoru a u kterých typů regulátorů se používá.*

**Otázka 4.5** *Nakreslete schémata jednotlivých složek PID regulátoru pomocí operačních zesilovačů. Jakým způsobem se z těchto schémat postaví PID regulátor.*



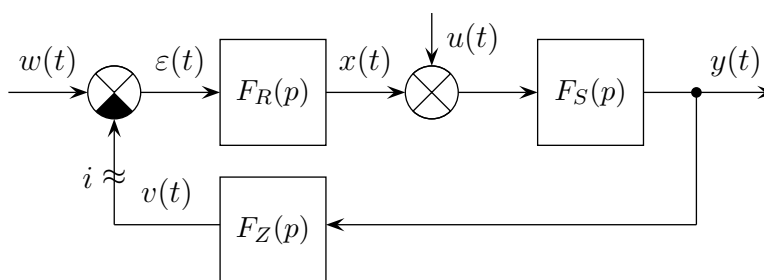
## 5 Základní typy přenosů ve spojitých zpětnovazebních obvodech a jejich vlastnosti

V této kapitole budou nadefinovány základní typy přenosů, které jsou typické pro zpětnovazební regulační zapojení. S těmito přenosy se budeme setkávat nejen během tohoto kurzu, ale i během kurzů, které na něj navazují. Kromě jejich definice zde budou uvedeny jejich vlastnosti. Podrobně rozebereme jejich trvalé ustálené odchylky pro různé typy vstupních signálů (impuls, skok, rampa, kvadratický průběh). To nám umožní jednoduchým způsobem určit počet astatismů které musí být v soustavě nebo v regulátoru s cílem dosáhnout nulové trvalé ustálené odchylky pro některý z výše uvedených vstupních signálů.

### 5.1 Základní typy přenosů

Jak jsme již uvedli v úvodu, technologické schéma zpětnovazebního regulačního obvodu lze za určitých předpokladů zjednodušit na tvar podle obrázku 5.1. Hlavní předpoklady nutné pro zjednodušení jsou

- veškeré poruchy, které na systém působí, jsou soustředěny na vstup regulované soustavy
- přenos regulátoru  $F_R(p)$  zahrnuje i přenosy výkonových a akčních členů, pokud nejsou zanedbatelné
- přenos ve zpětné vazbě  $F_Z(p)$  představuje přenos měřicího čidla, jakož i přenosy dalších přídatných členů. V některých případech je tento přenos roven jedné



Obrázek 5.1: Zjednodušené technologické schéma

U regulačního obvodu podle obrázku 5.1 definujeme následující typy přenosů

Typ přenosu	Rovnice	Poznámka
Regulované soustavy	$F_S(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$	
Regulátoru	$F_R(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$	
Zpětné vazby	$F_Z(p) = \frac{V(p)}{Y(p)}$	
Otevřené smyčky <sup>1</sup>	$F_0(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$	
Řízení	$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)}$	} přenosy uzavřeného obvodu
Poruchy v uzavřeném obvodě	$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$	
Odchytky	$F_e(p) = \frac{E(p)}{W(p)}$	
Akční veličiny	$F_a(p) = \frac{X(p)}{W(p)}$	

Pro výpočet přenosu otevřené smyčky a jednotlivých přenosů uzavřeného obvodu si překreslíme blokové schéma z obrázku 5.1 do potřebného tvaru. Řešení je provedeno v několika následujících podkapitolách.

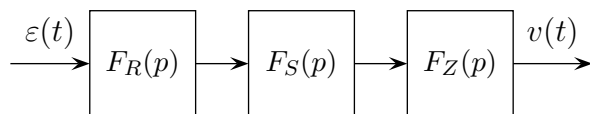
### 5.1.1 Přenos otevřené smyčky

Přenos otevřené smyčky získáme rozpojením zpětné vazby v obrázku 5.1 před vstupem do rozdílového členu, v místě označeném na obrázku *i*. Pro překreslení schématu dostaneme schéma na obrázku 5.2. Pro přenos tohoto zapojení můžeme psát

$$F_0(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)} = F_R(p)F_S(p)F_Z(p) \quad (5.1)$$

Je třeba si uvědomit, že signál  $\varepsilon(t)$  je roven regulační odchylce pouze v případě, že  $F_Z(p) = 1$ , neboť podle definice regulační odchylky  $e(t)$  platí  $e(t) = w(t) - y(t)$ . V případě, že ve zpětné vazbě není jednotkový přenos, pak signál  $\varepsilon(t)$  nazýváme vstupní veličinou regulátoru, nikoliv regulační odchylkou.

<sup>1</sup>Za předpokladu, že je zpětnovazební smyčka rozpojena v bodě *i*.



Obrázek 5.2: Zobrazení otevřené smyčky

### 5.1.2 Přenos řízení

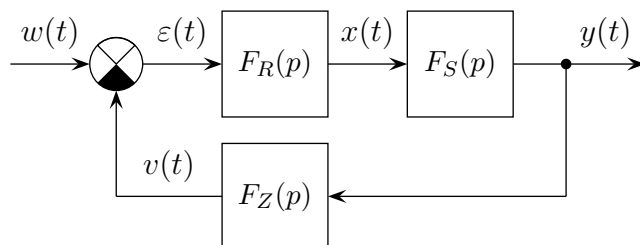
Při výpočtu přenosu řízení se uvažuje nulová porucha  $u(t)$ . Přenos potom vypočítáme podle obrázku 5.3

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_R(p)F_S(p)F_Z(p)} = \frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_0(p)} \quad (5.2)$$

V případě jednotkového přenosu ve zpětné vazbě  $F_Z(p) = 1$  platí pro přenos řízení rovnice

$$F_w(p) = \frac{F_0(p)}{1 + F_0(p)}$$

Cílem řízení je, aby výstupní signál  $y(t)$  co nejvěrněji sledoval průběh žádané hodnoty  $w(t)$ . V ustáleném stavu by se tyto signály měli shodovat, čili statické zesílení přenosu řízení by mělo být rovno jedné.

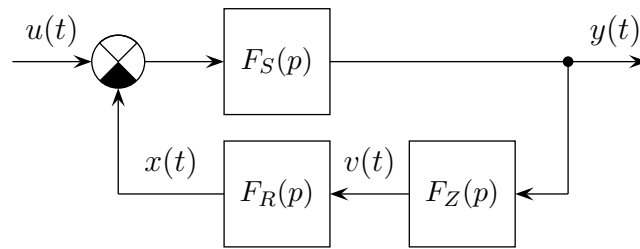


Obrázek 5.3: Přenos řízení

### 5.1.3 Přenos poruchy

Podobně jako při výpočtu přenosu řízení budeme o druhém vstupním signálu uvažovat, že je nulový. V tomto případě budeme uvažovat nulovou žádanou hodnotu  $w(t) = 0$ . Z pohledu poruchy si můžeme obrázek 5.1 překreslit na 5.4. Přenos tohoto zapojení je

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{F_S(p)}{1 + F_R(p)F_S(p)F_Z(p)} = \frac{F_S(p)}{1 + F_0(p)} \quad (5.3)$$



Obrázek 5.4: Přenos poruchy

Polaritu zpětné vazby jsme vyjádřili záporným znamínkem v součtovém členu s poruchou. Zdůrazněme, že pokud v tomto případě mluvíme o přenosu poruchy, máme na mysli přenos v **uzavřeném obvodu**. Pokud se někdy vyskytne případ, že poruchový signál působí v jiném místě soustavy než na jejím vstupu, mluvíme o přenosu poruchy v samotné soustavě a označujeme jej zpravidla  $F_{su}(p)$ . Porucha může vstupovat také na výstupu soustavy.

Působení poruchy nám vyvede systém z rovnováhy. Ikdyž porucha může být různého typu (pulsní, skoková, lineárně narůstající, harmonická, ...), obecně se dá říci, že je naší snahou, aby uzavřený systém působením regulátoru vliv poruchy co nejrychleji odstranil a aby statické zesílení přenosu poruchy bylo rovné nule.

#### 5.1.4 Přenos odchylny

Tímto přenosem vyjadřujeme, jak se řídicí veličina  $w(t)$  přenáší na regulační odchylnu  $e(t)$ . Jak již bylo zmíněno výše, je třeba rozlišovat dva případy:

a)  $F_Z(p) = 1$ , pak  $e(t) = \varepsilon(t) = w(t) - y(t)$  a podle obrázku 5.5 platí

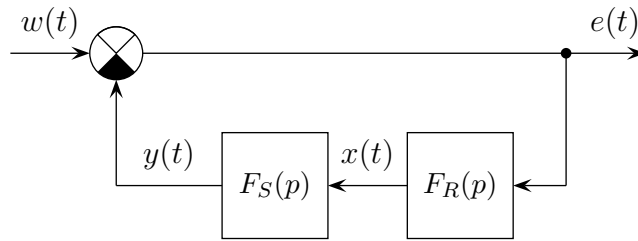
$$F_e(p) = F_\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + F_R(p)F_S(p)} = \frac{1}{1 + F_0(p)} \quad (5.4)$$

b)  $F_Z(p) \neq 1$ , pak  $e(t) \neq \varepsilon(t)$  a pro výpočet přenosu odchylny použijeme definiční vztah  $E(p) = W(p) - Y(p)$ . Pak platí

$$\begin{aligned} F_e(p) &= \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{W(p) - Y(p)}{W(p)} = 1 - F_w(p) = 1 - \frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_0(p)} \\ &= \frac{1 + F_0(p) - F_R(p)F_S(p)}{1 + F_0(p)} = \frac{1 + F_R(p)F_S(p)[1 - F_Z(p)]}{1 + F_0(p)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pro přenos vstupní veličiny regulátoru  $F_\varepsilon(p)$  ovšem platí vztah

$$F_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + F_0(p)}$$

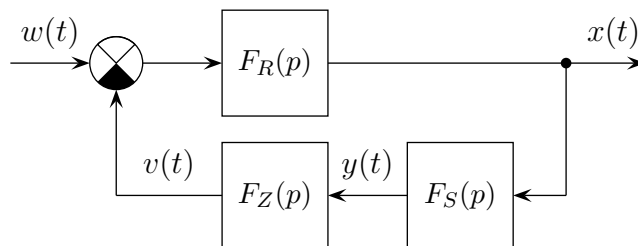


**Obrázek 5.5:** Přenos odchyvky

### 5.1.5 Přenos akční veličiny

Tento přenos charakterizuje průběh akční veličiny  $x(t)$  v závislosti na průběhu řídicí veličiny  $w(t)$ . Podle obrázku 5.6 platí

$$F_a(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{F_R(p)}{1 + F_R(p)F_S(p)F_Z(p)} = \frac{F_R(p)}{1 + F_0(p)} \quad (5.6)$$



**Obrázek 5.6:** Přenos Akční veličiny

Na tomto místě upozorníme na skutečnost, že všechny přenosy uzavřeného obvodu mají ve jmenovateli stejný výraz  $1 + F_0(p)$ . Jeho význam je vysvětlen v kapitole 6 o stabilitě zpětnovazebních systémů.

## 5.2 Vlastnosti standardních spojitých přenosů

Přenosy popsané v předchozích podkapitolách mají určité charakteristické rysy, které si rozebereme v této kapitole. Bude zde pro zjednodušení předpokládat, že zpětnovazební přenos  $F_Z(p) = 1$ . Toto zjednodušení si můžeme dovolit, pokud tento přenos neovlivní limitní stavy

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_Z(p) \neq \infty \quad \text{a} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} F_Z(p) \neq \infty$$

Tyto podmínky jsou v praxi vždy splněny. Až na výjimky platí

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_Z(p) = 1 \quad (5.7)$$

Přenos soustavy a regulátoru nahradíme jejich standardními tvary, které jsou

$$F_S(p) = \frac{K_S}{p^s \prod_{i=1}^{n-s} (T_i p + 1)} = \frac{K_S}{p^s S(p)} \quad (5.8)$$

$$F_R(p) = K_R \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p^r} = \frac{K_R}{p^r} R(p) \quad (5.9)$$

Snadno se lze převědčit, že odvozené vztahy platí i pro případ, kdy soustava obsahuje také nuly a když mezi póly přenosu soustavy jsou komplexně sdružené páry. Pro jednotlivé přenosy platí tyto důležité vztahy. Pokud někdy v průběhu návrhu regulátoru zjistíme, že tyto vztahy neplatí, je to pro nás zpětná kontrola, která říká, že jsme se někde dopustili chyby.

### 5.2.1 Přenos otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K_R K_S R(p)}{p^{r+s} S(p)} = \frac{M(p)}{N(p)}$$

Pro tento přenos vyřešíme limitní stavy. Pro limitu  $p \rightarrow 0$  mohou nastat dva případy

$$r + s > 0 \quad \text{potom} \quad \lim_{p \rightarrow 0} F_0(p) = \infty$$

$$r + s = 0 \quad \text{potom} \quad \lim_{p \rightarrow 0} F_0(p) = K_R K_S = K_0 \quad \text{což je zpravidla} > 1$$

Tyto limity představují ustálený stav při odezvě na jednotkový skok. Nijak nepřekvapuje, že pokud je v  $F_0(p)$  přítomen alespoň jeden integrátor, pak výstup odchází do nekonečna. Dále se podíváme na to, co se děje těsně po přivedení jednotkového skoku, tedy v čase  $t = 0^+$ . Pro reálné systémy vždy platí, že řád  $m$  čitatele  $M(p)$  je nižší než řád  $n$  jmenovatele  $N(p)$ . Potom

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_0(p) = 0$$

Přechodová charakteristika začíná v nule  $h(0^+) = 0$ .

### 5.2.2 Přenos řízení

Přenos řízení je dán vztahem

$$F_w(p) = \frac{K_R K_S R(p)}{p^{r+s} S(p) + K_R K_S R(p)} = \frac{M(p)}{N(p) + M(p)}$$

Jednou ze základních úloh řízení je, aby výstup pokud možno co nejpřesněji sledoval žádanou hodnotu. Následující vzorec ukazuje, jak to vypadá v ustáleném stavu po odezvě na jednotkový skok.

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_w(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro } r + s > 0 \\ \frac{K_0}{1+K_0} \doteq 1 & \text{pro } r + s = 0 \end{cases}$$

Pokud soustava a regulátor společně obsahují alespoň jeden integrátor, pak je přenos v ustáleném stavu roven jedné a požadavek řízení je splněn. Pokud tam integrátor přítomen není, je přenos řízení v ustáleném stavu vždy o něco menší než jedna. Abychom se přiblížili požadavku řízení, musíme zajistit co největší zesílení  $K_0 \rightarrow \infty$ .

Dále platí, ze stejného důvodu jako u přenosu otevřené smyčky,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_w(p) = 0$$

### 5.2.3 Přenos poruchy

Přenos poruchy je dán vztahem

$$F_u(p) = \frac{p^r K_S}{p^{r+s} S(p) + K_R K_S R(p)} \quad (5.10)$$

Potlačení poruchy působící na vstupu soustavy je další základní úlohou řízení. V ustáleném stavu by proto přenos poruchy měl být roven 0, nebo by měl být co nejmenší.

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_u(p) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r > 0 \\ \frac{1}{K_R} \doteq 0 & \text{pro } r = 0 \text{ a } s > 0 \\ \frac{K_S}{1+K_0} \doteq 0 & \text{pro } r = 0 \text{ i } s = 0 \end{cases}$$

Úplného vyregulování poruchy je dosaženo pouze v případě, kdy regulátor obsahuje integrační složku. Pokud tomu tak není, přesto limita jde k 0, protože  $K_R \gg 1$  a  $K_0 > 1$ . Dále platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_u(p) = 0$$

### 5.2.4 Přenos odchyly

Přenos odchyly je dán vztahem

$$F_e(p) = \frac{p^{r+s} S(p)}{p^{r+s} S(p) + K_R K_S R(p)} = \frac{N(p)}{N(p) + M(p)}$$

Ustálená odchyly souvisí s přenosem řízení. Pokud je přenos řízení roven  $F_w(p) = 1$ , je přenos odchyly roven  $F_e(p) = 0$ .

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_e(p) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r + s > 0 \\ \frac{1}{1+K_0} \doteq 1 & \text{pro } r + s = 0 \end{cases}$$

Protože  $n > m$ , bude řád čitatele a jmenovatele přenosu odchyly stejný a koeficienty u nejvyšších mocnin budou shodné. Proto

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_e(p) = 1$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že při skokové změně řídicí veličiny o velikosti  $w_0$  vznikne regulační odchyly stejné velikosti  $e(0^+) = w_0$ .

### 5.2.5 Přenos akční veličiny

Dosazením standardních tvarů regulátoru (5.9) a soustavy (5.8) do 5.6 dostaneme

$$F_a(p) = \frac{p^s K_R S(p) R(p)}{p^{r+s} S(p) + K_R K_S R(p)} = \frac{F_R(p) N(p)}{N(p) + M(p)}$$

Hodnoty pro limitní případy jsou

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_a(p) = \begin{cases} 0 & \text{pro } s > 0 \\ \frac{1}{K_S} & \text{pro } s = 0 \text{ a } r > 0 \\ \frac{K_R}{1+K_0} & \text{pro } s = 0 \text{ i } r = 0 \end{cases}$$

Ustálená hodnota řízení je rovna nule pouze v případě, kdy je v soustavě integrátor. Jinak by výstup soustavy narůstal a nejednalo by se o ustálený stav.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_a(p) = \begin{cases} \infty & \text{pro regulátory s ideální derivační složkou} \\ x & \text{pro většinu používaných regulátorů} \\ 0 & \text{pro regulátor typu I} \end{cases}$$

**Příklad 5.1** Zjistěte, zda přenos

$$F(p) = \frac{3p + 1}{6p^3 + 4p^2 + 2p + 10}$$

může být některým ze základních typů přenosů uzavřeného obvodu.

Nejprve si vypočítejme odezvu na jednotkový skok ve dvou limitních časech  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$ . Použijeme k tomu centrální limitní věty.

$$h(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) = 0.1$$

Ze zjištěných hodnot se dá usoudit, že by se mohlo jednat o přenos poruchy. Pak zřejmě platí, že v obvodu není použit regulátor typu I, PI, nebo PID, jinak by totiž byla  $h(\infty) = 0$ . Postarala by se o to právě integrační složka. Aby to mohl být přenos řízení, musel by být  $h(\infty) \doteq 1$ , což v tomto případě není. Aby to byl přenos odchylky, musel by být  $h(0) = 1$ , což také není. Poslední možností je přenos akční veličiny. Odezva přenosu akční veličiny na jednotkový skok závisí na typu regulátoru a na statickém zesílení regulátoru a soustavy. V našem případě by se mohlo jednat o regulátor I a soustavu se statickým zesílením 10. Protože použití čistě integračního regulátoru je řídké, jeví se jako pravděpodobnější přenos poruchy.

**Příklad 5.2** Zjistěte, zda přenos

$$F(p) = \frac{0.2p + 4.8}{8.5p^4 + 3p^3 + 2.5p^2 + 10p + 5}$$

může být některým ze základních typů přenosů uzavřeného obvodu.



Přenos		$F_0(p)$	$F_w(p)$	$F_u(p)$	$F_e(p)$	$F_a(p)$
Zákl. vztahy		$F_S(p)F_R(p)$	$\frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_0(p)}$	$\frac{F_S(p)}{1 + F_0(p)}$	$\frac{1}{1 + F_0(p)}$	$\frac{F_R(p)}{1 + F_0(p)}$
S $N(p)$ a $M(p)$		$\frac{M(p)}{N(p)}$	$\frac{M(p)}{N(p) + M(p)}$	$\frac{F_S(p)N(p)}{N(p) + M(p)}$	$\frac{N(p)}{N(p) + M(p)}$	$\frac{F_R(p)N(p)}{N(p) + M(p)}$
$\lim_{p \rightarrow 0}$	$r = 0$ $s = 0$	$K_0 > 1$	$\frac{K_0}{1 + K_0} \doteq 1$	$\frac{K_S}{1 + K_0} \ll 1$	$\frac{1}{1 + K_0} \ll 1$	$\frac{K_R}{1 + K_0} \ll 1$
	$r > 0$ $s = 0$	$\infty$	1	0	0	$\frac{1}{K_S}$
	$r = 0$ $s > 0$	$\infty$	1	$\frac{1}{K_R} \ll 1$	0	0
	$r > 0$ $s > 0$	$\infty$	1	0	0	0
	$m < n$	0	0	0	1	$\infty$ pro ideální PD a PID > 1 pro většinu regulátorů 0 pro I regulátor

**Tabulka 5.1:** Tabulka chování základních tvarů přenosů na jednotkový skok

Opět si nejprve vypočítejme odezvu na jednotkový skok ve dvou limitních časech  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$

$$h(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) = 0.96 \doteq 1$$

Na základě rozboru uvedeného v předchozím příkladě se jedná o přenos řízení. Nenulová trvalá ustálená odchylka dále napovídá, že astatismus není ani v soustavě, ani v regulátoru. K řízení je použit buďto regulátor P nebo PD. Mohl by to být i přenos akční veličiny. V tom případě by musel být použit I regulátor a soustava se statickým zesílením  $1/0.96$ .

### 5.3 Ustálené odchylky v regulačních obvodech

V předchozí kapitole jsme se zabývali limitními hodnotami všech přenosů. V této kapitole se zaměříme na velikost ustálené hodnoty odchylky v případě různých změn žádané hodnoty a různých změn poruchy působící na vstupu soustavy. To odpovídá dvěma základním požadavkům na řízení, kterými jsou sledování žádané hodnoty a potlačení nežádoucí poruchy. Ustálená hodnota odchylky nám vypovídá o statické kvalitě regulace. Její hodnota by měla být nulová. Při odvození budeme opět předpokládat,  $F_Z(p) = 1$ . Jak bylo ukázáno v předchozí kapitole (rovnice (5.7)), není tento předpoklad nijak limitující, neboť pro  $p \rightarrow 0$  je této hodnotě zpětnovazební přenos roven.

#### 5.3.1 Tvar odchylky pro různé změny řízení

Pro výpočet regulační odchylky použijeme vzorec o konečné hodnotě funkce

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \quad (5.11)$$

Pro vyjádření obrazu odchylky  $E(p)$  můžeme použít zjednodušenou variantu vzorce pro přenos odchylky 5.4.

$$F_e(p) = \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + F_0(p)}$$

Pro obraz odchylky platí

$$E(p) = F_e(p)W(p)$$

S využitím standardních tvarů přenosu soustavy (5.8) a regulátoru (5.9) z minulé kapitoly můžeme psát

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p)F_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) \frac{p^{r+s}}{p^{r+s} + K_0} \quad (5.12)$$

Velikost ustálené odchylky zřejmě závisí na průběhu žádané hodnoty a na počtu pólů přenosu otevřené smyčky v počátku. Ve vzorci nám stupně astatismů vystupují vždy v součtu, proto není podstatné, kde se bude astatismus nacházet (zda v soustavě či v regulátoru). Systémy s astatismem vyššího než druhého řádu mají problémy se stabilitou a proto budeme uvažovat tři případy hodnoty součtu  $r + s \in \{0; 1; 2\}$

Řídicí veličina může mít nejrůznější časový průběh. V našem zkoumání se omezíme na tři typické průběhy

- a) konstantní řídicí veličina  $w(t) = w_1$  s obrazem  $W_1(p) = \frac{w_1}{p}$
- b) lineárně narůstající řídicí veličina s časem  $w(t) = w_2 t$  s obrazem  $W_2(p) = \frac{w_2}{p^2}$
- c) kvadraticky narůstající řídicí veličina s časem  $w(t) = \frac{1}{2} w_3 t^2$  s obrazem  $W_3(p) = \frac{w_3}{p^3}$

Při určování obrazů  $W(p)$  samozřejmě předpokládáme, že časové signály jsou pro  $t < 0$  rovny nule.

Působením těchto tří typů řídicích signálů na tři různé typy regulačních obvodů dostáváme celkem devět kombinací. Velikost ustálené odchylky pro jednotlivé kombinace získáme prostým dosazením typu přenosu žádané hodnoty do rovnice (5.12). Výsledky jsou souhrnně uvedeny v tabulce 5.2. Na základě požadavků na ustálenou odchylku potom volíme typ regulátoru a jeho velikost zesílení.

$r + s \setminus W(p)$	$\frac{w_1}{p}$	$\frac{w_2}{p^2}$	$\frac{w_3}{p^3}$
0	$\frac{w_1}{1 + K_0}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{w_2}{K_0}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{w_3}{K_0}$

**Tabulka 5.2:** Ustálená odchylka pro různé typy průběhů žádané hodnoty a typu regulačního obvodu

**Příklad 5.3** *Regulovaná soustava, jejímž vstupem je teplota, má přenos*

$$F_S(p) = \frac{0.2}{(10p + 1)^2(3p + 1)}$$

*Požadujeme, aby ustálená odchylka při řídicím signálu s nárůstem  $0.1^\circ\text{C s}^{-1}$  nebyla větší než  $0.3^\circ\text{C}$*

Z tabulky 5.2 je zřejmé, že v obvodu musí být astatismus alespoň prvního řádu. Protože soustava je statická, musí být astatismus v regulátoru, z toho plyne, že můžeme použít regulátor s integrační složkou (typ I, PI, nebo PID).

Vstupní signál má obraz

$$W(p) = \frac{0.1}{p^2}$$

Pro ustálenou odchylku platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{0.1}{0.2K_R} \leq 0.3 \quad \rightarrow \quad K_R \geq \frac{0.1}{0.2 \cdot 0.3} = 1.67$$

Statické zesílení regulátoru musí být větší než 1.67. Tvar regulátoru bude

$$F_R(p) = 1.67 \frac{r_2 p^2 + r_1 p + 1}{p(\varepsilon p + 1)}$$

Velikost jednotlivých konstant se určí na základě požadavků na stabilitu a dynamické vlastnosti regulačního obvodu.

### 5.3.2 Nulová ustálená odchylka bez integrační složky v regulačním obvodu

Z tabulky 5.2 plyne, že požadavek na nulovou ustálenou odchylku v obvodu se skokovou změnou řídicí veličiny a statickou soustavou lze splnit pouze v případě, kdy je v regulátoru obsažena integrační složka. Vzorce v tabulce 5.2 byly odvozeny za předpokladu, že má zpětnovazební přenos limitu  $\lim_{p \rightarrow 0} F_Z(p) = 1$ . Uvažme nyní, že statické zesílení zpětnovazebního přenosu bude různé od jedné, rovné nějaké konstantě  $\lim_{p \rightarrow 0} F_Z(p) = K_Z \neq 1$ . Pak vstupní veličina regulátoru není regulační odchylka, ale

$$\varepsilon(t) = w(t) - K_Z y(t)$$

kdežto regulační odchylka je

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

Podívejme se, zda existuje nějaké zesílení  $K_Z$ , pro které by vycházela nenulová vstupní veličina regulátoru, ale nulová regulační odchylka. Přenos řízení je roven

$$F_w(p) = \frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_R(p)F_S(p)F_Z(p)}$$

Ustálenou hodnotu odchylky vypočítáme limitou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p)F_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p)[1 - F_w(p)]$$

Dosažením standardních tvarů přenosů soustavy  $F_S(p)$  a regulátoru  $F_R(p)$  dostaneme

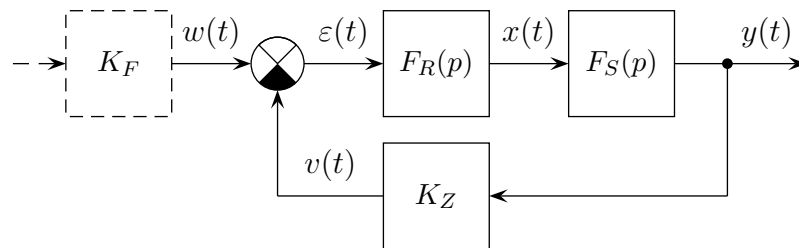
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p)F_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) \frac{1 + K_0 K_Z - K_0}{1 + K_0 K_Z}$$

Pokud položíme  $1 + K_0 K_Z - K_0 = 0$  a vyřešíme tuto rovnici pro hledanou hodnotu  $K_Z$ , získáme zesílení ve zpětné vazbě, které zajistí nulovou ustálenou regulační odchylku i v obvodě bez astatismu.

$$K_Z = \frac{K_0 - 1}{K_0}$$

Stejného efektu jako s touto úpravou dosáhneme předřazením zesilovače s přenosem  $F_F(p) = K_F$  (viz. obrázek 5.7). Zesílení se nastaví jako inverze statického zesílení přenosu řízení, tedy

$$K_F = \frac{1 + K_0}{K_0}$$



**Obrázek 5.7:** Možnosti zajištění nulové ustálené odchylky na skok řízení pro  $r + s = 0$

**Příklad 5.4** Pro soustavu s přenosem  $F_S(p) = \frac{1}{(p+1)(0.1p+1)}$  byl navržen proporcionální regulátor s přenosem  $F_R(p) = 5$ . Určete velikost trvalé ustálené regulační odchylky pro případ, kdy na vstupu působí skoková změna žádané hodnoty o velikosti  $w_1 = 2$ . Navrhněte velikost zesílení ve zpětné vazbě, které ustálenou regulační odchylku kompenzuje.

Použitím vzorce pro konečnou hodnotu dostaneme trvalou ustálenou odchylku pro skokovou změnu žádané hodnoty  $w_1 = 2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{w_1}{p} \frac{1}{1 + F_0(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} 2 \frac{(p+1)(0.1p+1)}{(p+1)(0.1p+1) + 5} = 0.33$$

Nyní určíme velikost zesílení ve zpětné vazbě zajišťující nulovou ustálenou odchylku. Vyjdeme z přenosu regulační odchylky

$$F_e(p) = \frac{1 + F_0(p) - F_R(p)F_S(p)}{1 + F_0(p)}$$

Opět využitím vzorce pro konečnou hodnotu dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{w_1}{p} \frac{1 + F_0(p) - F_R(p)F_S(p)}{1 + F_0(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} 2 \frac{(p+1)(0.1p+1) + 5K_Z - 5}{(p+1)(0.1p+1) + 5K_Z} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} 2 \frac{1 + 5K_Z - 5}{1 + 5K_Z} = 0 \end{aligned}$$

Zesílení  $K_Z$  získáme vyřešením rovnice  $1 + 5K_Z - 5 = 0$ , tedy  $K_Z = 4/5$ . Simulací pomocí Simulinku se snadno přesvědčíme že vypočtené hodnoty jsou správné.

### 5.3.3 Tvar odchylky pro různé změny poruchy

Přenos poruchy  $F_u(p)$  definuje, jakým způsobem se projeví působení poruchy na vstupu soustavy na výstup soustavy. V našem případě nás však nezajímá výstup, ale regulační odchylka. Předpokládáme, že žádaná hodnota je nulová  $w(t) = 0$ . V tom případě platí  $e(t) = -y(t)$ , kde velikost výstupu můžeme vypočítat z přenosu poruchy  $F_u(p)$ . Pak bude platit vztah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = - \lim_{p \rightarrow 0} pU(p)F_u(p)$$

Přenos poruchy vyjádřený pomocí standardních tvarů přenosů soustavy a regulátoru je uveden v (5.10). Jeho dosazením do limity dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = - \lim_{p \rightarrow 0} pU(p)F_u(p) = - \lim_{p \rightarrow 0} pU(p) \frac{p^r K_S}{p^{r+s} + K_S K_R} =$$

Ustálená hodnota regulační odchylky tedy závisí na časovém průběhu působící poruchy, na přítomnosti integrační složky v regulátoru ( $r = 1$ ) a také na jednotlivých zesíleních soustavy  $K_S$  a regulátoru  $K_R$ . Hodnoty pro stejné typy vstupních signálů jako v případě žádané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 5.3. Z důvodu stability obvodu uvažujeme pouze dvě hodnoty parametru  $r \in \{0; 1\}$ .  $r = 0$  odpovídá regulátorům P nebo PD a  $r = 1$  odpovídá regulátorům I, PI nebo PID. Ještě jednou připomeňme, že tabulka 5.3 platí za

$r, s \setminus U(p)$	$\frac{u_1}{p}$	$\frac{u_2}{p^2}$	$\frac{u_3}{p^3}$
$r = 0$ $s = 0$	$-\frac{u_1 K_S}{1 + K_0}$	$-\infty$	$-\infty$
$r = 0$ $s > 0$	$-\frac{u_1}{K_R}$	$-\infty$	$-\infty$
$r = 1$ $s = 0$	0	$-\frac{u_2}{K_R}$	$-\infty$
$r = 1$ $s > 0$	0	$-\frac{u_2}{K_R}$	$-\infty$

**Tabulka 5.3:** Ustálená odchylka pro různé typy průběhů poruchy a regulačního obvodu předpokladu, že porucha působí na vstupu soustavy.

## 5.4 Shrnutí

V této kapitole jsou popsány základní přenosy, se kterými se můžeme setkat ve zpětnovazebních regulačních obvodech. S těmito přenosy se budeme setkávat v celém zbytku tohoto učebního textu. Mezi nejdůležitější přenosy uzavřeného obvodu patří přenos řízení a přenos poruchy. Je to z toho důvodu, že nás informují o tom jakým způsobem bude systém reagovat na změnu žádané hodnoty a jak se daný zpětnovazební regulační obvod vypořádá s působením poruchy na vstupu soustavy. V této kapitola nás zajímaly statické vlastnosti, tedy trvalé ustálené odchylky. O nulové ustálené odchylce, která bývá nejčastěji naším požadavkem při návrhu regulačního obvodu, rozhoduje (jak jsme si zde ukázali) počet astatismů v regulátoru a v soustavě.

## 5.5 Kontrolní otázky

**Otázka 5.1** *Co je to přenos otevřené smyčky?*

**Otázka 5.2** *S jakými přenosy uzavřeného obvodu se setkáváme v technologickém schématu zpětnovazebního regulačního obvodu.*

**Otázka 5.3** *Určete jmenovatelový polynom všech přenosů uzavřeného obvodu?*

**Otázka 5.4** *Jaký typ regulátoru musíme použít, aby byla nulová ustálená odchylka při skokové změně řídicího signálu, pokud je soustava bez astatismu a je kmitavá?*

**Otázka 5.5** *Jaký typ regulátoru musíme použít, aby byla nulová ustálená odchylka při skokové změně poruchy působící na vstupu soustavy, pokud je soustava přetlumená s astatismem prvního řádu?*

**Otázka 5.6** *Vysvětlete pojem regulační odchylky. Jak se liší od vstupní veličiny regulátoru?*

## 6 Stabilita obvodů se zpětnou vazbou

*Jednou z možností jak určit stabilitu zpětnovazebního obvodu je vypočítat jeho výsledný přenos, čímž se řešení převede na určení stability dynamického systému, které jste se naučili v předchozím kurzu. Jedná se zejména o algebraická kritéria stability. V této kapitole zjistíme, že použití těchto kritérií sice dává kvantitativní výsledky, ale již pro relativně jednoduché úlohy vede na značně složitě řešení. Poněkud jiným typem kritéria je Nyquistovo kritérium stability. To určuje stabilitu uzavřeného obvodu na základě znalosti průběhu frekvenční charakteristiky přenosu otevřené smyčky a počtu nestabilních pólů tohoto přenosu. Nyquistovo kritérium bude v této kapitole odvozeno a vysvětleno na množství příkladů. Na konci kapitoly bude ukázáno využití programu Matlab a jeho Toolbox-ů.*

### 6.1 Opakování znalostí o stabilitě lineárních dynamických systémů

Stabilita lineárních dynamických systémů byla podrobně rozebrána v předchozím kurzu. Zde pouze zopakujeme základní poznatky. Nejprve definice stability.

Lineární systém je stabilní tehdy, jestliže se jeho výstup po skončení budicího (vstupního) signálu a po doznění přechodného děje vrátí na původní hodnotu.

Lineární systém je stabilní tehdy, jestliže odezva na omezený budicí signál je rovněž omezená.

Podmínkou stability lineárního spojitého systému je přítomnost všech pólů přenosové funkce v levé polorovině komplexní roviny  $p$ . Jde tedy o kořeny polynomu ve jmenovateli přenosu.

Podmínkou stability lineárního diskrétního systému je přítomnost všech pólů přenosové funkce uvnitř jednotkové kružnice. Jde opět o kořeny polynomu ve jmenovateli přenosu.

Stabilita lineárních diskrétních systému se obvykle řeší použitím bilineární transformace

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

a následným použitím metod známých pro spojitě soustavy.

Podmínkou stability lineárního spojitého systému vyjádřeného stavovou reprezentací je přítomnost vlastních čísel matice zpětných vazeb  $\mathbf{A}$  v levé polorovině komplexní roviny  $p$ . Vlastní čísla matice (viz. B.4) určíme řešením rovnice

$$|\mathbf{I}p - \mathbf{A}| = 0$$

která je charakteristickou rovnicí systému.

V případě stavové reprezentace je potřeba rozlišovat stabilitu stavu a stabilitu výstupu, což v některých případech nemusí být totéž. U systémů, které nesplňují podmínku pozorovatelnosti může dojít k nestabilitě stavu, aniž by byla porušena stabilita výstupu. Výše uvedená charakteristická rovnice se týká stability stavu.

Uvažujme, že řízená soustava obsahuje nestabilní nulu. Jak bude ukázáno později, nestabilní nula se nám nepříznivě projeví ve zpomalení regulačního děje. Pokud by regulátor obsahoval nestabilní pól, který by tuto nulu kompenzoval, pak by se nám uzavřený obvod z hlediska výstupu jevil jako stabilní, ale interně by byl nestabilní. V praxi není možné



takovéto rušení dvojice nula-pól, neboť z důvodu nepřesnosti znalosti modelu soustavy by nedošlo k jejich zkrácení, což by se projevilo nestabilitou uzavřeného systému.

## 6.2 Stabilita ze známé charakteristiké rovnice

S ohledem na rovnice standardních přenosů uzavřeného regulačního obvodu, které jsme odvodili v kapitole 5.1 víme, že všechny zpětnovazební přenosy mají stejný jmenovatelový polynom  $1 + F_0(p)$ . Tento polynom nazýváme charakteristický polynom a obvykle ho značíme  $\Delta(p)$ . Rovnici  $\Delta(p) = 0$  nazýváme charakteristickou rovnicí systému. K tomu aby byl zpětnovazební systém stabilní, musí ležet kořeny charakteristické rovnice  $\Delta(p)$  v levé polorovině komplexní roviny  $p$ . V případě, že jsou všechny koeficienty charakteristické rovnice známé, získá se poloha kořenů řešením charakteristické rovnice (pokud to jde tak analyticky, jinak numericky). Protože charakteristický polynom často obsahuje jednu nebo více neznámých proměnných (většinou parametry regulátoru), jsou algebraická kritéria výhodnější. Pro tento test stability máme k dispozici algebraická kritéria Hurwitzovo a Routh-Schurovo. Jejich výhodou je, že neurčí stabilitu pro jediné nastavení regulátoru, ale dávají rozsah hodnot parametrů regulátoru, pro které je daný systém stabilní.

**Příklad 6.1** *K regulované soustavě s přenosem*

$$F_S(p) = \frac{0.2}{p(5p + 1)^2}$$

*je připojen PD regulátor. Určete rozsah jeho koeficientů s ohledem na stabilitu systému.*

Předpokládejme nejprve ideální PD regulátor s přenosem

$$F_R(p) = K(Tp + 1)$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$1 + \frac{0.2K(Tp + 1)}{p(5p + 1)^2} = 0$$

po úpravě dostaneme

$$25p^3 + 10p^2 + (1 + 0.2KT)p + 0.2K = 0$$

Stabilitu můžeme určit pomocí Hurwitzových determinantů. Pro stabilitu je rozhodující Hurwitzův determinant druhého řádu

$$\begin{vmatrix} 10 & 25 \\ 0.2K & 1 + 0.2KT \end{vmatrix} > 0$$

Vyčíslením determinantu získáme nerovnost

$$K(2T - 5) > -10$$

Ta je splněna pro  $T > 2.5$  pro libovolné  $K$  a při  $0 < T < 2.5$  pro

$$K < \frac{10}{5 - 2T}$$

Při použití reálného PD regulátoru s přenosem

$$F_R(p) = K \frac{Tp + 1}{\varepsilon p + 1}$$

bude charakteristická rovnice

$$1 + \frac{0.2K(Tp + 1)}{p(5p + 1)^2(\varepsilon p + 1)} = 0$$

a po úpravě

$$25\varepsilon p^4 + (10\varepsilon + 25)p^3 + (\varepsilon + 10)p^2 + (1 + 0.2KT)p + 0.2K$$

Předpokládejme, že realizační časová konstanta PD regulátoru je rovna  $\varepsilon = 0.1s$ . Potom má charakteristický polynom tvar

$$\Delta(p) = 2.5p^4 + 26p^3 + 10.1p^2 + (1 + 0.2KT)p + 0.2K$$

Hurwitzova matice je

$$H = \begin{pmatrix} 26 & 2.5 & 0 \\ 1 + 0.2KT & 10.1 & 26 \\ 0 & 0.2K & 1 + 0.2KT \end{pmatrix}$$

Podmínka stability je vyjádřena podmínkou kladných subdeterminantů  $\det(H_2)$  a  $\det(H_3)$ .

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} 26 & 2.5 \\ 1 + 0.2KT & 10.1 \end{vmatrix} > 0$$

Vyčíslením determinantu dostaneme podmínku  $260.1 - 0.5KT > 0$ , jejíž úpravou dostaneme podmínku  $KT < 520.2$ .

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} 26 & 2.5 & 0 \\ 1 + 0.2KT & 10.1 & 26 \\ 0 & 0.2K & 1 + 0.2KT \end{vmatrix} > 0$$

vyčíslením determinantu dostaneme podmínku

$$260.1 + 51.5KT - 135.2K - 0.1K^2T^2 > 0$$

což je pro obecné řešení již značně nepřehledný vztah. Jak patrně, algebraická kritéria stability jsou v případě obecného řešení i v jednoduchých případech dosti výpočetně složitá.

### 6.3 Nyquistovo kritérium stability

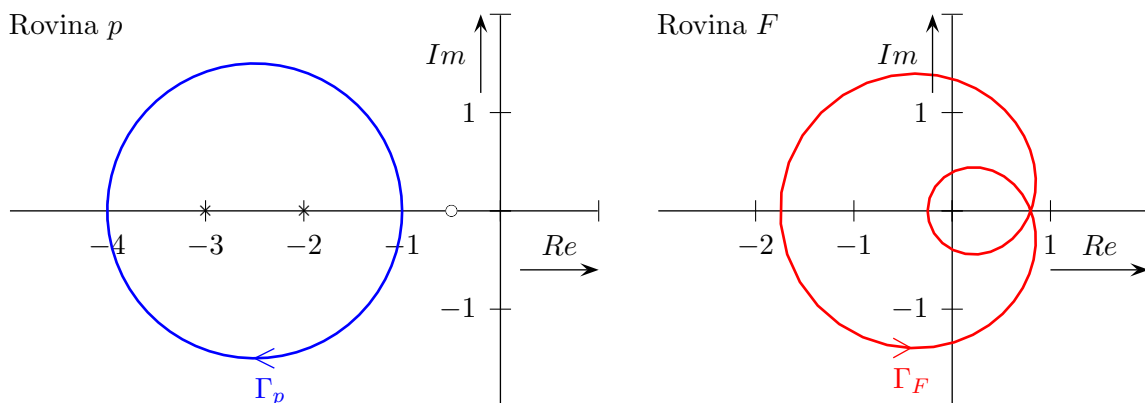
Nyquistovo kritérium slouží k určování stability uzavřené smyčky. Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, uzavřená smyčka bude stabilní, pokud budou všechny póly přenosu uzavřeného obvodu v levé polorovině komplexní roviny  $p$ . Nyquist ale ukázal, že o stabilitě uzavřené smyčky se dá rozhodnout na základě průběhu frekvenční charakteristiky *otevřené smyčky a poloze jejich pólů*. To je výhodné, protože přenos otevřené smyčky je na rozdíl od přenosu uzavřené smyčky většinou k dispozici. Není ani nutné znát analytický tvar  $F_0(j\omega)$ , stačí experimentálně zjištěná data. Je možné ho navíc použít pro systémy s dopravním zpožděním, kde algebraická kritéria selhávají.

#### 6.3.1 Chauchyho teorém o fázi

Předpokládejme komplexní rovinu  $p$ , kde jsou jednotlivé body určeny  $p = \sigma + j\omega$ . Mějme racionální funkci komplexního argumentu, v našem případě přenos daný podílem dvou polynomů  $F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  se známými kořeny

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = k \frac{(p - \beta_1)(p - \beta_2) \dots (p - \beta_m)}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \dots (p - \alpha_n)}$$

Uvažujme uzavřenou, záporně orientovanou křivku  $\Gamma_p$  (křivka orientovaná ve směru hodinových ručiček) v rovině  $p$ , která neprochází žádným kořenem (nulou ani pólem) přenosu  $F(p)$ . Pokud budeme postupně dosazovat body z této křivky ve zvoleném směru do přenosu  $F(p)$ , budeme získávat jinou orientovanou, uzavřenou křivku  $\Gamma_F$  v rovině  $F$ . Tomuto procesu se říká mapování uzavřené křivky  $\Gamma_p$  z roviny  $p$  do roviny  $F$ . Obrázek 6.1 ukazuje proces mapování pro případ, kdy je mapující funkce (přenos) rovna  $F(p) = \frac{p+0.5}{(p+2)(p+3)}$



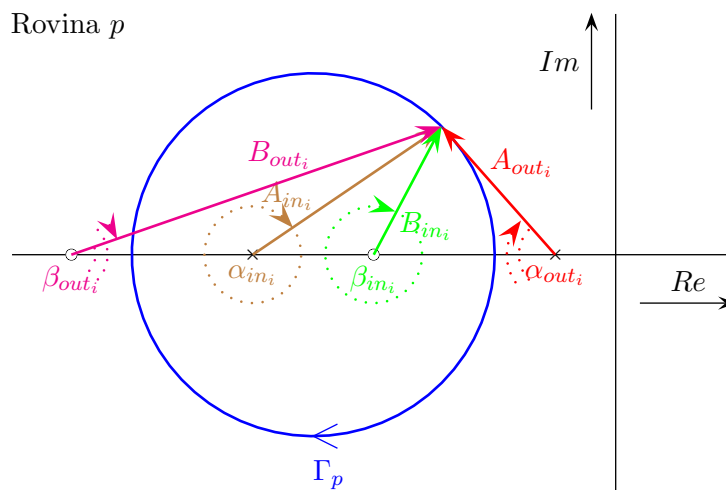
Obrázek 6.1: Mapování křivky  $\Gamma_p$  do roviny  $F$

Existuje vztah mezi počtem nul a pólů uvnitř uzavřené křivky  $\Gamma_p$  a změnou fáze křivky  $\Gamma_F$ , jinými slovy o kolik se otočí vektor začínající v počátku a procházející postupně body na křivce  $\Gamma_F$  ve směru získaném mapováním z křivky  $\Gamma_p$ . O tomto vztahu vypovídá Chauchyho teorém o fázi.

Jestliže uzavřená, záporně orientovaná křivka  $\Gamma_p$  v rovině  $p$  obkličuje  $n_B$  nul a  $n_A$  pólů přenosu  $F(p)$  a neprochází žádným jejím pólem ani nulou, potom uzavřená křivka  $\Gamma_F$  vzniklá mapováním křivky  $\Gamma_p$  do roviny  $F$  funkcí  $F(p)$  obíhá počátek této roviny  $n_B - n_A$  krát v záporném směru.

Pro případ z obrázku 6.1 platí, že uvnitř uzavřené křivky  $\Gamma_p$  leží dva póly a žádná nula.  $n_B = 0$  a  $n_A = 2$ . Křivka také neprochází žádnou nulou ani pólem. Podle předchozí věty by měl být počet oběhů  $-2$  v záporném směru, což jsou dva oběhy v kladném směru. Z obrázku 6.1 vidíme, že tomu tak skutečně je.

Pro odvození Cauchyho teorému je důležitá změna fáze uzavřené orientované křivky  $\Gamma_F$ . Víme, že fáze přenosu  $F(p)$  je dána součtem jednotlivých příspěvků kořenových činitelů čitatele  $(p - \beta_i)$ , od kterých se odečte součet jednotlivých příspěvků kořenových činitelů jmenovatele  $(p - \alpha_i)$ . Jednotlivé kořenové činitele představují při mapování uzavřené křivky  $\Gamma_p$  v komplexní rovině vektory  $B_i(p) = (p - \beta_i)$  a  $A_i(p) = (p - \alpha_i)$  s počátkem v jednotlivých kořenech a končících v bodech na křivce  $\Gamma_p$ .



Obrázek 6.2: Vliv kořenů  $F(p)$  na změnu fáze uzavřené křivky  $\Gamma_F$

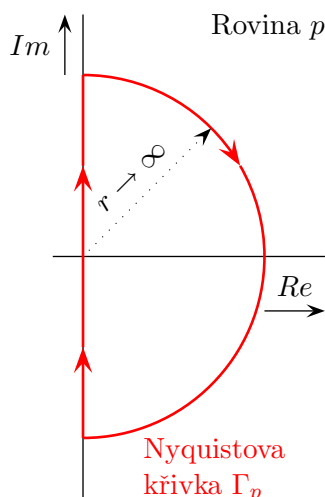
Na obrázku 6.2 je znázorněn pohyb vektorů s kořeny uvnitř ( $B_{in_i}(p)$  a  $A_{in_i}(p)$ ) a vně ( $B_{out_i}(p)$  a  $A_{out_i}(p)$ ) uzavřené křivky  $\Gamma_p$ . Z obrázku je vidět, že vektory s počátkem uvnitř  $\Gamma_p$  se po obejití této křivky otočí jednou dokola (o  $2\pi$ ) ve stejném směru, jak je orientovaná křivka  $\Gamma_p$ . Pro záporně orientovanou křivku  $\Gamma_p$  platí, že příspěvek od nuly  $\beta_{in_i}$  je  $-2\pi$  a příspěvek pólu  $\alpha_{in_i}$  se bere se záporným znaménkem, tedy  $2\pi$ .

Podíváme-li se na vektory s počátkem v nule  $\beta_{out_i}$  nebo v pólu  $\alpha_{out_i}$  vně uzavřené křivky  $\Gamma_p$ , pak vidíme, že jejich příspěvek je nulový, čili tyto kořeny se na výsledné změně fáze uzavřené křivky  $\Gamma_F$  nepodílí.

Celková změna fáze (počet oběhů křivky  $\Gamma_F$  kolem počátku) odpovídá součtu dílčích příspěvků od jednotlivých kořenů. Proto  $-n_B 2\pi + n_A 2\pi = 2\pi(n_A - n_B)$ , což odpovídá výše uvedenému teorému.

### 6.3.2 Odvození Nyquistova kritéria stability

Cauchyho teorému o změně fáze Nyquist využil při odvození pravidla pro určování stability uzavřeného obvodu. Vytvořil záporně orientovanou křivku  $\Gamma_p$ , která obkličuje celou pravou polorovinu roviny  $p$ . Je složena z imaginární osy a půlkružnice s nekonečným poloměrem  $r \rightarrow \infty$  přes pravou polorovinu (viz. obrázek 6.3). Tento tvar je výhodný, neboť bodům na imaginární ose  $p = j\omega$  odpovídá po mapování frekvenční charakteristika  $F(j\omega)$  a křivce přes nekonečno odpovídá bod v počátku roviny  $F$ . Uzavřená křivka  $\Gamma_F$  je tedy frekvenční charakteristika  $F(j\omega)$  pro  $\omega \in (-\infty, \infty)$



Obrázek 6.3: Nyquistova křivka

Pro stabilitu uzavřeného obvodu je rozhodující poloha pólů přenosové funkce uzavřeného obvodu, t.j. kořenů jmenovatele. Jmenovatel všech přenosů uzavřeného obvodu je podle kapitoly 5.1 roven charakteristickému polynomu  $1 + F_0(p)$ . Předpokládejme, že přenos otevřené smyčky je dán podílem polynomů

$$F_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Dosazením do charakteristické rovnice dostaneme

$$F(p) = 1 + F_0(p) = 1 + \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{C(p)}{A(p)} = 0 \quad (6.1)$$

Prozatím také předpokládejme, že kořeny polynomů  $C(p)$  a  $A(p)$  neleží na imaginární ose (tedy ani v počátku). Tento požadavek vychází z podmínky v Cauchyho teorému, že uzavřená křivka  $\Gamma_p$  neprochází žádnou nulou ani pólem přenosu  $F(p)$ .

Stabilita uzavřeného obvodu bude zajištěna, když budou kořeny polynomu  $C(p)$  ležet v levé polorovině komplexní roviny  $p$ . Otevřený obvod naproti tomu může být nestabilní, a proto kořeny polynomu  $A(p)$  mohou ležet v pravé polorovině roviny  $p$ . Polynomy  $C(p)$  a  $A(p)$  jsou stejného stupně, neboť z důvodu fyzikální realizovatelnosti nemůže být polynom  $B(p)$  vyššího stupně než polynom  $A(p)$ . Oba polynomy můžeme vyjádřit ve tvaru

kořenových činitelů.

$$C(p) = n_n(p - \gamma_1)(p - \gamma_2) \dots (p - \gamma_n) \quad A(p) = a_n(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \dots (p - \alpha_n) \quad (6.2)$$

Obecně komplexní kořeny  $\gamma_i$  tedy musí ležet v levé polorovině komplexní roviny  $p$  a kořeny  $\alpha_i$  mohou ležet kdekoliv (musíme pouze vědět, kolik je jich v pravé polorovině roviny  $p$ ).

Podle Cauchyho teorému bude uzavřený systém stabilní pouze tehdy, pokud bude frekvenční charakteristika  $F(j\omega)$  pro  $\omega \in (-\infty, \infty)$  obíhat počátek roviny  $F$  v kladném směru tolikrát, kolik nestabilních pólů má přenos  $F(p)$ . Pokud se počet oběhů liší, potom polynom  $C(p)$  musí nutně obsahovat kořeny v pravé polorovině komplexní roviny  $p$  a uzavřený zpětnovazební obvod je nestabilní.

Vykreslování frekvenční charakteristiky  $F(j\omega)$  by však bylo velmi pracné. Místo určování počtu oběhů funkce  $F(j\omega)$  kolem počátku, je jednodušší sledovat počet oběhů funkce  $F_0(j\omega)$  (frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu) kolem bodu  $(-1, 0)$ . Výsledek je tentýž, neboť stačí upravit rovnici (6.1) na tvar

$$F_0(j\omega) = -1$$

V Nyquistově kritériu tedy provádíme mapování do roviny  $F_0$ . Protože přenos otevřeného obvodu  $F_0(p)$  bývá obvykle dán ve tvaru součinu přenosů základních typových článků, nečiní konstrukce frekvenční charakteristiky potíže.

Nyquistovo kritérium v konečném tvaru zní

**Uzavřený zpětnovazební obvod je stabilní, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu v komplexní rovině obíhá při změně frekvence od  $-\infty$  do  $\infty$  bod  $(-1, 0)$  v kladném směru tolikrát, kolik pólů přenosu otevřené smyčky leží v pravé polorovině roviny  $p$ .**

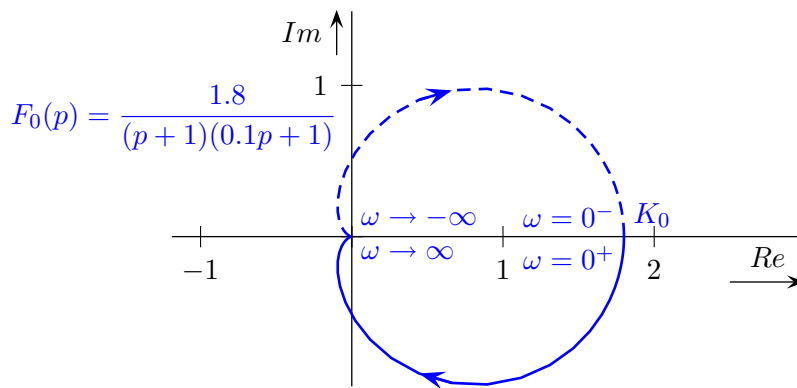
Při řešení stability uzavřeného obvodu vycházíme ze znalosti kreslení frekvenčních charakteristik v komplexní rovině, kterou jsme si osvojili v předchozích kurzech. Frekvenční charakteristika pro záporné frekvence se získá jako zrcadlový obraz charakteristiky pro kladné frekvence, symetrický podle reálné osy komplexní roviny.

**Příklad 6.2** *Otevřený obvod tvoří statická soustava tvořená dvěma setrvačnými články v sérii s proporcionálním regulátorem. Proveďte rozbor stability uzavřeného obvodu.*

Přenos otevřené smyčky je

$$F_0(p) = \frac{K_0}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$

Frekvenční charakteristika je nakreslena na obrázku 6.4 Změna zesílení  $K_0$  se projevuje jako změna měřítka na reálné i imaginární ose. Je tedy zřejmé, že žádným zesílením  $K_0 > 0$  se nám nepodaří posunout frekvenční charakteristiku  $F_0(j\omega)$  tak, aby obíhala bod  $(-1; 0)$ . Počet oběhů bodu  $(-1; 0)$  je proto roven 0 pro všechna možná zesílení. Protože přenos  $F_0(p)$  neobsahuje žádný nestabilní pól, můžeme na základě Nyquistova kritéria říci, že uzavřený obvod bude stabilní pro  $K_0 > 0$ .



Obrázek 6.4: Frekvenční charakteristika k příkladu 6.2

**Příklad 6.3** *Regulovaná soustava má přenos*

$$F_S(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 1}$$

a regulátor je typu reálného PD

$$F_R(p) = \frac{5p + 1}{0.1p + 1}$$

*Proveďte rozbor stability uzavřeného systému.*

Přenos otevřené smyčky je

$$F_0(p) = \frac{5p + 1}{(p^2 - 4p + 1)(0.1p + 1)}$$

Pokusme se zopakovat postup vedoucí k získání přibližného tvaru frekvenční charakteristiky  $F_0(p)$ . Nejprve vypočteme hodnoty vektoru frekvenčního přenosu v limitních hodnotách frekvence  $\omega$ .

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |F_0(j\omega)| = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |F_0(j\omega)| = 0$$

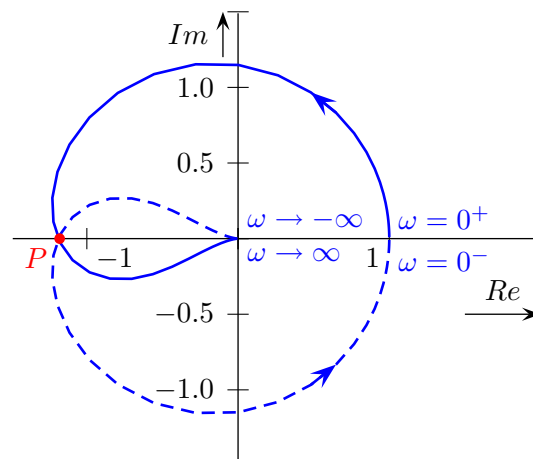
Fáze přenosu je určena rovnicí

$$\varphi_0(\omega) = \arctan 5\omega + \arctan \frac{4\omega}{1 - \omega^2} - \arctan 0.1\omega \quad \text{pro } \omega \leq 1 \quad (6.3)$$

$$\varphi_0(\omega) = \arctan 5\omega + \pi + \arctan \frac{4\omega}{1 - \omega^2} - \arctan 0.1\omega \quad \text{pro } \omega > 1 \quad (6.4)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_0(\omega) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_0(\omega) = \pi$$

Řešení fáze se rozdělilo na dvě rovnice. Hodnota funkce  $\frac{4\omega}{1-\omega^2}$  je pro  $\omega \rightarrow 1^-$  rovna  $\infty$  a pro  $\omega \rightarrow 1^+$  rovna  $-\infty$ . Použitím funkce  $\arctan$  by nám vznikla nespojitost ve fázi (skok z  $\pi/2$  na  $-\pi/2$ ), která je výše provedeným rozdělením potlačena.



**Obrázek 6.5:** Frekvenční charakteristika k příkladu 6.3

Protože první člen na pravé straně rovnice pro  $\varphi_0(\omega)$  narůstá s rostoucím  $\omega$  daleko rychleji, než třetí člen (který jej v limitě  $\omega \rightarrow \infty$  kompenzuje), bude zřejmě maximální úhel větší než  $\pi$ . Nyní již můžeme nakreslit přibližný tvar frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$ , jak je vidět na obrázku 6.5.

Soustava má dva póly v pravé polorovině. Jedná se o kořeny polynomu  $p^2 - 4p + 1$ , které jsou  $p_1 = 3.73$  a  $p_2 = 0.27$ .

Mohou nastat dva případy počtu oběhů frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$  v závislosti na velikosti zesílení  $K_0$ . Pro malé zesílení je průsečík se zápornou reálnou osou  $P$  napravo od bodu  $-1$ . Počet oběhů kolem bodu  $-1$  je v takovém případě 0. V druhém případě, tedy pro vysoké zesílení  $K_0$  je průsečík se zápornou reálnou osou  $P$  zápornější než bod  $-1$ , tak jak je to vidět na obrázku 6.5. Frekvenční charakteristika  $F_0(j\omega)$  udělá dva oběhy kolem bodu  $-1$  v kladném směru. Tento případ je na rozdíl od prvního stabilní, neboť se podle Nyquistova kritéria počet oběhů v kladném směru shoduje s počtem nestabilních pólů otevřené smyčky. Pokud je zesílení  $K_0$  větší než nějaká mezní hodnota  $K_{0min}$ , potom bude uzavřený obvod stabilní. Pro nás je samozřejmě tento mezní bod zajímavý a proto ho nyní zkusíme vypočítat. Nejprve musíme určit hodnotu frekvence  $\omega_1$ , při které je fáze  $\varphi_0(\omega_1) = \pi$ . Tato úloha není snadno řešitelná, neboť frekvenci  $\omega_1$  nelze z rovnic (6.3) a (6.4) analyticky jednoduše vypočítat. Výpočet se dá provést iterativně, čímž získáme přibližnou hodnotu  $\omega_1 \doteq 1.75$ . Pro absolutní hodnotu přenosu  $F_0(j\omega_1)$  platí

$$|F_0(j\omega_1)| = \frac{\sqrt{25 \cdot 1.75^2 + 1}}{\sqrt{(0.01 \cdot 1.75^2 + 1)[(1 - 1.75^2)^2 + 16 \cdot 1.75^2]}} = 1.185 \geq 1$$

Uzavřený systém je na základě výše uvedeného rozboru pro  $K_0 = 1$  stabilní. Stačí ovšem zmenšit zesílení soustavy v poměru  $1/1.185$  a systém přejde do nestabilního stavu. Čtenář se o tom může snadno přesvědčit použitím některého algebraického kritéria.

Nyquistovo kritérium stability má své výhody a nevýhody

- kromě toho, že kritérium určí, zda bude zpětnovazební obvod stabilní, dává nám navíc představu o tom, jak daleko jsme od nestability a jaké změny frekvenční



charakteristiky otevřeného obvodu jsou žádoucí. Tohoto poznatku se s výhodou používá při syntéze regulačních obvodů

- kritérium se dá použít i na experimentálně změřená data
- kreslení frekvenčních charakteristik v komplexní rovině je většinou přibližné, protože kvantitativně přesné vykreslení je pracné. Tato nevýhoda je z velké míry odstraněna využitím výpočetní techniky.

### 6.3.3 Nyquistovo kritérium pro $F_0(p)$ s póly v počátku

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že rozhodnutí o počtu oběhů frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu kolem bodu  $(-1, 0)$  není obtížné ani v případě, kdy některé póly funkce  $F_0(p)$  leží v pravé polorovině roviny  $p$ . Podívejme se blíže na situaci, kdy  $F_0(p)$  obsahuje pól nebo vícenásobný pól v počátku. Pak obě větve frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$  nabývají v okolí bodů  $\omega = 0^+$  a  $\omega = 0^-$  nekonečné amplitudy a je třeba rozhodnout, jakou cestou na sebe budou navazovat.

Pro tento případ se počátek komplexní roviny zahrne do levé poloroviny, což bude mít za následek změnu cesty  $\Gamma_p$  po imaginární ose v komplexní rovině. Při změně frekvence od  $\omega = -\infty$  se blížíme k počátku po záporné imaginární poloose až do minimální vzdálenosti od počátku (obrázek 6.6). Ten pak obejdeme po půlkružnici s poloměrem  $r \rightarrow 0$  a dále pokračujeme po kladné imaginární poloose. Podívejme se, jaká bude amplituda a fáze vektoru  $F_0(p_a)$ , kde  $p_a$  jsou souřadnice bodů na půlkružnici.

Předpokládejme, že přenos otevřené smyčky má v počátku  $k$ -násobný pól. Pak lze psát

$$F_0(p) = \frac{1}{p^k} R(p)$$

Pomocná funkce  $R(p)$  bude nabývat na půlkružnici s  $r \rightarrow 0$  téměř konstantní hodnotu a nemá tudíž na průběh  $F_0(p)$  v blízkém okolí počátku vliv. Body na půlkružnici se dají vyjádřit rovnicí

$$p_a = r \cdot e^{j\varphi_a} \quad \text{kde } \varphi_a \in (-\pi/2, \pi/2)$$

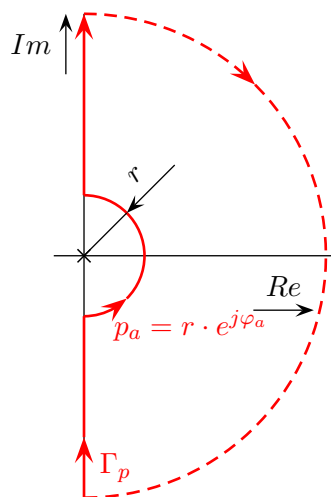
Protože  $r \rightarrow 0$ , bude amplituda vektoru  $F_0(j\omega)$  na této půlkružnici nekonečná a fáze se bude měnit v mezích  $k\pi/2$  do  $-k\pi/2$  v záporném směru, neboť platí

$$F_0(p_a) = \frac{1}{p_a^k} R(p_a) \doteq \frac{1}{r^k} e^{-j\varphi_a k} konst$$

Frekvenční charakteristika  $F_0(j\omega)$  se tak uzavře přes nekonečno obloukem s nekonečnou amplitudou a fází měnící se v rozsahu  $(k\pi/2, -k\pi/2)$

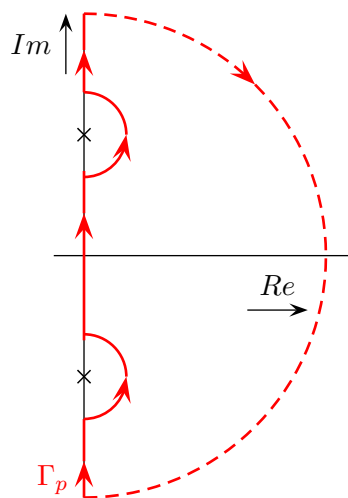
**Poznámka 1.:** To, že jsme zahrnuli  $k$  pólů v počátku do levé poloroviny neznamena, že říkáme, že jsou stabilní. Pouze s nimi jako se stabilními v Nyquistovu kritériu počítáme. Stejně tak bychom je mohli zahrnout do pravé poloroviny a obcházet je z druhé strany. Tím by se změnil smysl otáčení oblouku přes nekonečno a pro určení kritéria bychom museli tyto póly uvažovat jako nestabilní.

**Poznámka 2.:** Podobně by se řešil případ, ve kterém by jmenovatel přenosu otevřené smyčky  $A(p)$  obsahoval dvojici komplexně sdružených kořenů ležících na imaginární ose.



**Obrázek 6.6:** Směr obcházení počátku

Opět bychom je zahrnuli do levé či pravé poloroviny, obešli je po kružnici s poloměrem jdoucím k nule a řešili, jak se frekvenční charakteristika uzavírá přes nekonečno (viz. obrázek 6.7).



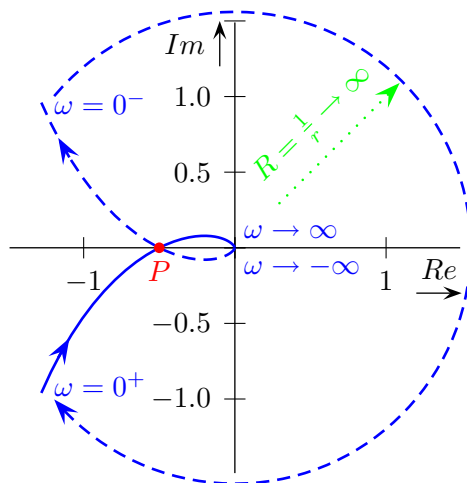
**Obrázek 6.7:** Směr obcházení kořenů na imaginární ose

**Příklad 6.4** Na základě Nyquistova kritéria určete stabilitu uzavřené smyčky, pokud je přenos otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K_0}{p(Tp + 1)^2} \quad \text{kde } T > 0$$

Přenos otevřené smyčky nemá žádné nestabilní póly, protože pól v počátku zahrnujeme pro řešení Nyquistovým kritériem do levé poloroviny komplexní roviny  $p$ . Frekvenční charakteristika  $F_0(j\omega)$  je znázorněna na obrázku 6.8. K tomu, aby byl uzavřený obvod stabilní,

nesmí frekvenční charakteristika  $F_0(j\omega)$  obíhat kolem bodu  $(-1; 0)$ . To bude splněno pro malé hodnoty zesílení  $K_0$ , kdy bod  $P$  bude ležet napravo od bodu  $(-1; 0)$ . Jinak totiž oběhne funkce  $F_0(j\omega)$  bod  $(-1; 0)$  dvakrát v záporném směru, což odpovídá nestabilnímu systému.



**Obrázek 6.8:** Frekvenční charakteristika k příkladu 6.4

**Příklad 6.5** Pomocí Nyquistova kritéria určete podmínky stability uzavřené smyčky, pokud je přenos otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K_0(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)}$$

Průběh frekvenční charakteristiky otevřené smyčky  $F_0(j\omega)$  kvalitativně závisí na poměru časových konstant  $T_1$  a  $T_2$ . Mohou nastat tři případy.

a)  $T_1 < T_2$  pro fázi vektoru  $F_0(j\omega)$  platí

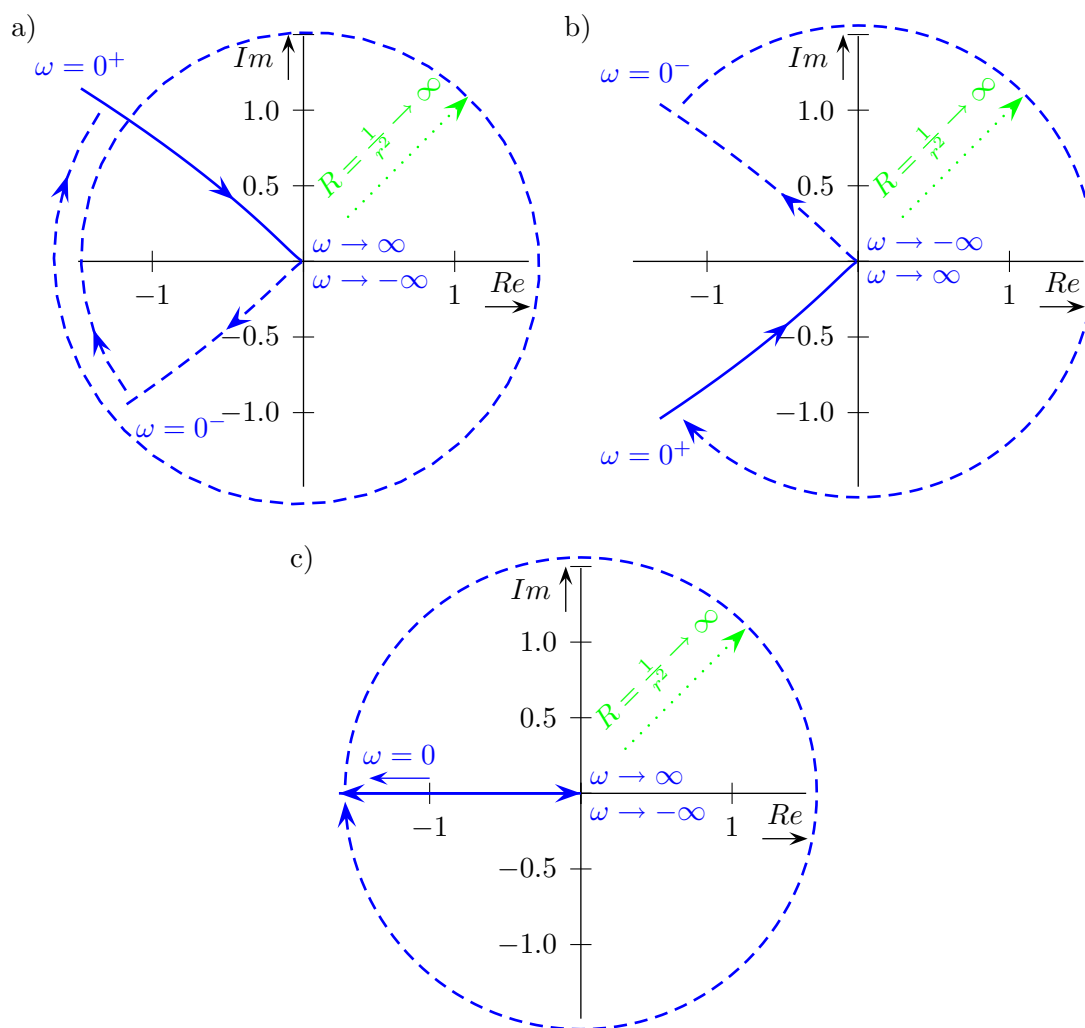
$$\varphi_0(\omega) = -\pi - \arctan T_2 \omega + \arctan T_1 \omega$$

Podle předpokladu je  $T_1 < T_2$  a proto také  $\arctan T_1 \omega < \arctan T_2 \omega$ , takže úhel  $\varphi_0(\omega)$  bude zápornější než  $-\pi$ . Tvar frekvenční charakteristiky je naznačen na obrázku 6.9 a). V tomto případě dojde ke dvěma oběhům v záporném směru a systém je proto vždy nestabilní, bez ohledu na velikost zesílení  $K_0$ .

b)  $T_1 > T_2$  Ze stejného důvodu jako v předchozím případě pro fázi platí, že úhel  $\varphi_0(\omega)$  bude kladnější než  $-\pi$

$$\varphi_0(\omega) > -\pi$$

Frekvenční charakteristika otevřené smyčky  $F_0(j\omega)$  je načrtnuta na obrázku 6.9 b). K žádnému oběhu kolem bodu  $(-1; 0)$  nedojde a uzavřený obvod je bez ohledu na velikost zesílení vždycky stabilní.



Obrázek 6.9: Frekvenční charakteristika k příkladu 6.5

c)  $T_1 = T_2$  V tomto případě je přenos otevřené smyčky roven

$$F_0(p) = \frac{K_0}{p^2}$$

a ve jmenovateli přenosu uzavřené smyčky je charakteristický polynom ve tvaru

$$p^2 + K_0 = 0$$

Přenos uzavřeného obvodu má dva imaginární póly  $p_{1,2} = \pm j\sqrt{K_0}$ , což znamená, že se chová jako kmitavý členek s nulovým tlumením. V souladu s definicí považujeme takovýto systém za nestabilní. Frekvenční charakteristika  $F_0(j\omega)$  je zakreslena na obrázku 6.9 c), odkud rovněž plyne, že tento systém je nestabilní.

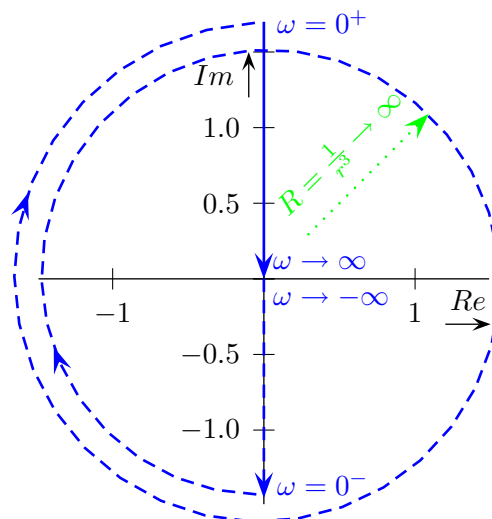
**Příklad 6.6** Pomocí Nyquistova kritéria určete podmínky stability uzavřené smyčky, pokud je přenos otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K_0}{p^3}$$

Pro frekvenční charakteristiku otevřené smyčky platí

$$F_0(j\omega) = \frac{K_0}{(j\omega)^3} = j \frac{K_0}{\omega^3}$$

Odpovídající frekvenční charakteristika je na obrázku 6.10. Charakteristika obíhá kolem bodu  $(-1; 0)$  dvakrát v záporném směru, takže uzavřený systém je vždy nestabilní. O plat-



**Obrázek 6.10:** Frekvenční charakteristika k příkladu 6.6

nosti všech provedených závěrů se můžeme přesvědčit libovolným algebraickým kritériem.

### 6.3.4 Zjednodušené Nyquistovo kritérium

Většina regulovaných soustav nemá žádné póly v pravé polorovině komplexní roviny  $p$ . Protože se takové póly nevyskytují ani v přenosu běžných regulátorů, je i celá otevřená smyčka stabilní, případně astatická, pokud je v soustavě či v regulátoru pól v počátku. V těchto případech nesmí  $F_0(j\omega)$  obíhat bod  $(-1, 0)$  vůbec a lze použít zjednodušené Nyquistovo kritérium stability **Uzavřený obvod je stabilní, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu  $F_0(j\omega)$  při nárůstu frekvence od 0 do  $\infty$  probíhá vpravo od bodu  $(-1, 0)$ .**

Často se uvádí geometricky názornější formulace zjednodušeného kritéria

**Postupujeme-li po frekvenční charakteristice  $F_0(j\omega)$  v komplexní rovině směrem narůstající frekvence, musí bod  $(-1, 0)$  zůstat po naší levé straně.**

Pro určení stability pomocí zjednodušeného Nyquistova kritéria je postačující sledovat průběh  $F_0(j\omega)$  pouze pro kladná  $\omega$ .

**Příklad 6.7** Pomocí zjednodušeného Nyquistova kritéria určete stabilitu uzavřeného obvodu, když je přenos otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K_0(p+1)^2}{p^2(10p+1)(0.1p+1)^2}$$

*Získané závěry srovnajte s výsledky Routh-Schurova kritéria*

Limitní hodnoty amplitudy  $F_0(j\omega)$  jsou

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F_0(j\omega) = \infty \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} F_0(j\omega) = 0$$

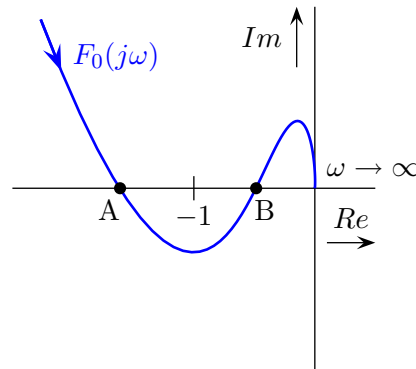
Pro fázi tohoto přenosu platí

$$\varphi_0(\omega) = -\pi + 2 \arctan \omega - \arctan 10\omega - 2 \arctan 0.1\omega$$

Odkud lze usoudit, že z počátečního úhlu  $\varphi_0(0) = -\pi$  bude úhel se vzrůstající frekvencí nejprve klesat ( $\arctan 10\omega$ ), potom se projeví dvojnásobný kořen v čitateli a fáze začne narůstat. Fáze bude pro jisté frekvence kladnější než  $-\pi$ . Potom se začne projevovat dvojnásobný kořen ve jmenovateli, fáze začne opět klesat a konečná hodnota bude  $\varphi_0(\infty) = -3\pi/2$ . Frekvenční charakteristika  $F_0(j\omega)$  bude probíhat podle obrázku 6.11 Podle zjednodušeného Nyquistova kritéria bude uzavřený obvod stabilní, jestliže zesílení obvodu  $K_0$  bude zvoleno tak, že bod  $(-1; 0)$  bude ležet mezi body A a B. Pro ověření tohoto závěru použijeme Routh-Schurovo kritérium stability. Charakteristický polynom uzavřeného obvodu je

$$0.1p^5 + 2.01p^4 + 10.2p^3 + (K_0 + 1.0)p^2 + 2.0K_0p + K_0$$

Na tento polynom aplikujeme Routh-Schurovo kritérium



Obrázek 6.11: Ukázka podmíněně stabilního systému

0.1	2.01	10.2	$1 + K_0$	$2K_0$	$K_0$	$\alpha_1 = \frac{0.1}{2.01} = 0.05$
-0.1	-0.05(1 + K <sub>0</sub> )			-0.05K <sub>0</sub>		
0	2.01	$10.15 - 0.05K_0$	$1 + K_0$	$1.95K_0$	$K_0$	$\alpha_2 = \frac{2.01}{10.15 - 0.05K_0}$
-2.01		$-\frac{3.92K_0}{10.15 - 0.05K_0}$				
0	$10.15 - 0.05K_0$	$\frac{10.15 + 6.18K_0 - 0.05K_0^2}{10.15 - 0.05K_0}$	$1.95K_0$	$K_0$		$\alpha_3 = \frac{(10.15 - 0.05K_0)^2}{10.15 + 6.18K_0 - 0.05K_0^2}$
-10.15 + 0.05K <sub>0</sub>		$-\frac{K_0(10.15 - 0.05K_0)^2}{10.15 + 6.18K_0 - 0.05K_0^2}$				
	0	$\frac{10.15 + 6.18K_0 - 0.05K_0^2}{10.15 - 0.05K_0}$	$K_0[1.95 -$	$K_0$		$-\frac{(10.15 - 0.05K_0)^2}{10.15 + 6.18K_0 - 0.05K_0^2}]$

Podle Routh-Schurova kritéria stability musí mít všechny koeficienty v redukováných řádcích stejné znaménko, aby byl systém stabilní. Z jednotlivých řádků plynou následující podmínky pro stabilitu uzavřeného obvodu. Poznamenejme, že podíl dvou čísel je kladný, pokud má čitatel i jmenovatel stejné znaménko.

$$1 + K_0 > 0 \rightarrow K_0 > -1$$

$$K_0 > 0$$

$$10.15 - 0.05K_0 > 0 \rightarrow K_0 < 203$$

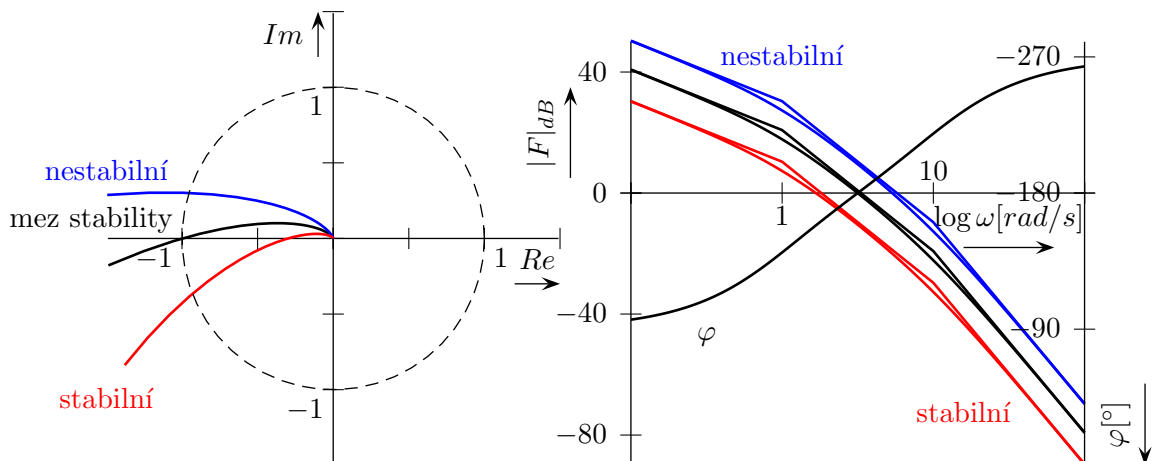
$$10.15 + 6.18K_0 - 0.05K_0^2 > 0 \rightarrow -1.62 < K_0 < 125.2$$

$$-83.23 + 13.07K_0 - 0.1K_0^2 > 0 \rightarrow 6.7 < K_0 < 124$$

Všechny výše uvedené podmínky musí platit společně. Je vidět, že nejprísnejší je pátá podmínka, která udává rozsah možných zesílení, která zaručí stabilitu uzavřené smyčky  $6.7 < K_0 < 124$ . To potvrzuje výsledky získané Nyquistovým kritériem stability. Vidíme také, že řešení pomocí Routh-Schurova kritéria sice dává kvantitativní výsledky, ale řešení je i pro tento vcelku jednoduchý příklad dosti složité. Tento obvod patří k podmíněně stabilním systémům, které jsou stabilní jen pro zesílení omezené nejen shora, ale též zdola.

### 6.3.5 Zjednodušené Nyquistovo kritérium v logaritmických souřadnicích

Pokud přenos otevřené smyčky neobsahuje póly v pravé polorovině komplexní roviny  $p$ , lze jak jsme se již dozvěděli v minulé kapitole použít zjednodušené Nyquistovo kritérium stability. Kromě toho se navíc dá velmi rychle určit stabilita z frekvenční charakteristiky otevřené smyčky v logaritmických souřadnicích. Formulace obecného tvaru Nyquistova kritéria by v logaritmických souřadnicích byla velmi obtížná.



**Obrázek 6.12:** Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině a logaritmických souřadnicích a jejich souvislost z hlediska stability podle zjednodušeného Nyquistova kritéria

Při odvození zjednodušeného Nyquistova kritéria stability v logaritmických souřadnicích vyjdeme ze vztahu s frekvenčními charakteristikami v komplexní rovině. Na obrázku 6.12 jsou vidět oba typy frekvenčních charakteristik pro systém s přenosem otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K_0}{p(p+1)(p+10)}$$

a pro tři různé hodnoty zesílení. Frekvenční charakteristika  $F_0(p)$  se zesílením  $K_0 = 109.7$  prochází bodem  $(-1; 0)$ . Uzavřený systém by byl podle zjednodušeného Nyquistova kritéria na mezi stability. V logaritmických souřadnicích to odpovídá případu, kdy amplitudová charakteristika nabývá hodnoty  $1$  ( $0dB$ ) při stejné frekvenci, kdy fázová charakteristika nabývá hodnoty  $-180^\circ$ . Připomeňme, že frekvence kdy amplitudová charakteristika nabývá hodnoty  $1$  ( $0dB$ ) se nazývá frekvence řezu  $\omega_{\check{r}}$ . Vyšší hodnota zesílení  $K_0 = 330$  vede podle průběhu  $F_0(p)$  v komplexní rovině k nestabilitě. V logaritmických souřadnicích se to projeví tak, že fáze  $\varphi$  je při kmitočtu řezu  $\omega_{\check{r}}$  zápornější než  $-\pi$  ( $\varphi < -180^\circ$ ). Naopak nižší hodnota zesílení  $K_0 = 33$  vede podle průběhu  $F_0(p)$  v komplexní rovině na stabilní zpětnovazební zapojení. V logaritmických souřadnicích se to projeví tak, že fáze  $\varphi$  je při kmitočtu řezu  $\omega_{\check{r}}$  kladnější než  $-\pi$  ( $\varphi > -180^\circ$ ). **Uzavřený systém, jehož otevřený obvod nemá póly v pravé polorovině komplexní roviny  $p$ , je stabilní, jestliže při frekvenci  $\omega_{\check{r}}$ , při které  $|F_0(j\omega)| = 1$ , je fáze kladnější než  $-\pi$**

Poznámka: Z tohoto důvodu se při kreslení frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$  v logaritmických souřadnicích kreslí průběh fáze tak, že hodnota  $0dB$  odpovídající přenosu 1



se shoduje s hodnotou fáze  $-180^\circ$ . Osa fáze se kreslí obráceně, takže se snižuje směrem nahoru. Pokud fáze prochází při kmitočtu řezu  $\omega_{\dot{\gamma}}$  pod osou  $0dB$ , pak bude uzavřený zpětnovazební systém stabilní, pokud bude fáze při  $\omega_{\dot{\gamma}}$  procházet osou  $0dB$ , pak bude na mezi stability a pokud bude fáze při  $\omega_{\dot{\gamma}}$  nad osou  $0dB$ , pak bude systém nestabilní.

**Příklad 6.8** Rozhodněte o stabilitě zpětnovazebního regulačního obvodu na základě průběhu frekvenční charakteristik otevřené smyčky  $F_0(p)$  v logaritmických souřadnicích, pokud

$$F_0(p) = \frac{K_0(p+1)^2}{p^2(10p+1)(0.1p+1)^2}$$

Tento způsob rozboru stability můžeme použít, neboť přenos otevřené smyčky  $F_0(p)$  neobsahuje póly v pravé polorovině komplexní roviny  $p$ . Průběh fáze  $\varphi$  ukazuje, že uzavřený zpětnovazební obvod bude stabilní, pokud bude kmitočet řezu  $\omega_{\dot{\gamma}}$  ležet v rozsahu  $(1.15; 7.8)rad/s$  (viz. obrázek 6.13). Na obrázku 6.13 jsou nakresleny průběhy limitních frekvenčních charakteristik, pro které je uzavřený systém na mezi stability. Průběh  $|F_{01}(j\omega)|_{dB}$  prochází  $\omega_{\dot{\gamma}} = 1.15$  a odpovídá zesílení  $17dB$ , čemuž odpovídá  $K_0 = 7.08$ . Druhý průběh  $|F_{02}(j\omega)|_{dB}$  prochází  $\omega_{\dot{\gamma}} = 7.8$  a odpovídá zesílení  $42dB$ , čemuž odpovídá  $K_0 = 125$ . Všimněme si, že při kreslení amplitudových charakteristik musíme respektovat vliv chyby při asymptotické náhradě, neboť obě mezní frekvence leží velmi blízko bodů, ve kterých dochází ke zlomu asymptotické náhrady o  $\pm 40dB/dek$ . Systém je stabilní pro hodnoty zesílení v rozsahu  $(7.08; 125)$ . Protože je rozsah zesílení omezen jak shora, tak také zdola, je tento systém podmíněně stabilní.

## 6.4 Použití programu Matlab

Při řešení stability algebraickými kritérii u systémů, které závisejí na proměnných parametrech si můžeme pomoci použitím Symbolického toolbox-u v programu Matlab.

**Příklad 6.9** S využitím Symbolického Toolbox-u vyřešte příklad 6.1 s ideálním PD regulátorem.

Nejprve musíme nadefinovat symboly proměnných, které budeme během výpočtu potřebovat.

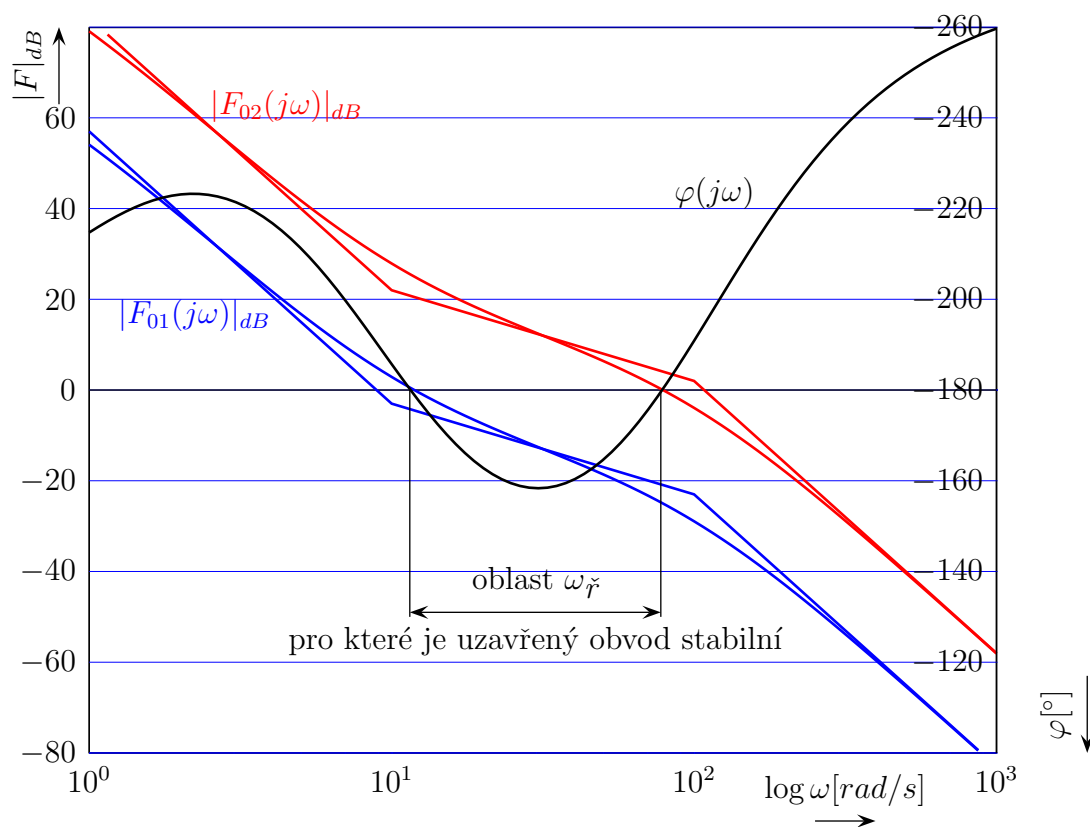
```
>> syms p K T
```

Nyní si vypočítáme charakteristický polynom

```
>> delta1 = p*(5*p + 1)^2 + 0.2*K*(T*p + 1)
delta1 =
p*(5*p+1)^2+1/5*K*(T*p+1)
```

Tento tvar si upravíme tak, aby byl seřazen jako polynom, kde budou vidět jednotlivé koeficienty u mocnin Laplaceova operátoru  $p$

```
>> delta1 = collect(delta1,p)
delta1 =
25*p^3+10*p^2+(1+1/5*K*T)*p+1/5*K
```



Obrázek 6.13: Test stability Nyquistovým kritériem v logaritmických souřadnicích

Tento tvar není moc přehledný, proto si ho přepíšeme ve tvaru

```
>> pretty(delta1)
```

$$25 p^3 + 10 p^2 + (1 + 1/5 K T) p + 1/5 K$$

Toto je charakteristický polynom, ze kterého můžeme přímo psát Hurwitzovu matici. Koeficienty sem můžeme přepsat ručně, nebo použít funkci, která vybere z polynomu koeficient u dané mocniny. Například pro výběr koeficientu u  $p^1$  použijeme příkaz

```
>> maple('coeff',delta1,p,1)
```

```
ans =
1+1/5*K*T
```

Potom determinant

```
>> H=[10 25; maple('coeff',delta1,p,0) maple('coeff',delta1,p,1)]
```

```
H =
[      10,      25]
[ 1/5*K, 1+1/5*K*T]
```

Vypočítáme determinant  $\det(H)$

```
>> det(H)
```

```
ans =
10+2*K*T-5*K
```

Determinant musí být kladný  $10 + 2KT - 5K > 0$ . Oba koeficienty jsou také kladné  $K > 0$  a  $T > 0$ . Tuto soustavu nerovnic řešíme dále stejně jako v příkladě 6.1.

Při řešení stability uzavřeného obvodu pomocí Nyquistova kritéria stability si můžeme v Matlabu usnadnit práci použitím příkazů na vykreslení frekvenčních charakteristik. Je potřeba mít na paměti, že ne vždycky je automaticky zvolený rozsah frekvencí, ve kterém je frekvenční charakteristika vykreslována, Matlabem vybrán optimálně a že nás zajímá chování kolem bodu  $(-1; 0)$ . Demonstrujme si to následujícím příkladem.

**Příklad 6.10** Pomocí programu Matlab vyřešte stabilitu zpětnovazebního regulačního obvodu s přenosem otevřené smyčky  $F_0(p)$  z příkladu 6.8. Pro vykreslení frekvenční charakteristiky použijte zesílení  $K_0 = 10$

Zadáme přenos

$$F_0(p) = \frac{10(p+1)^2}{p^2(10p+1)(0.1p+1)^2} = \frac{100(p+1)^2}{p^2(p+0.1)(p+10)^2}$$

```
>> F0=zpk([-1 -1 ], [0 0 -0.1 -10 -10], [100])
```

```
Zero/pole/gain:
```

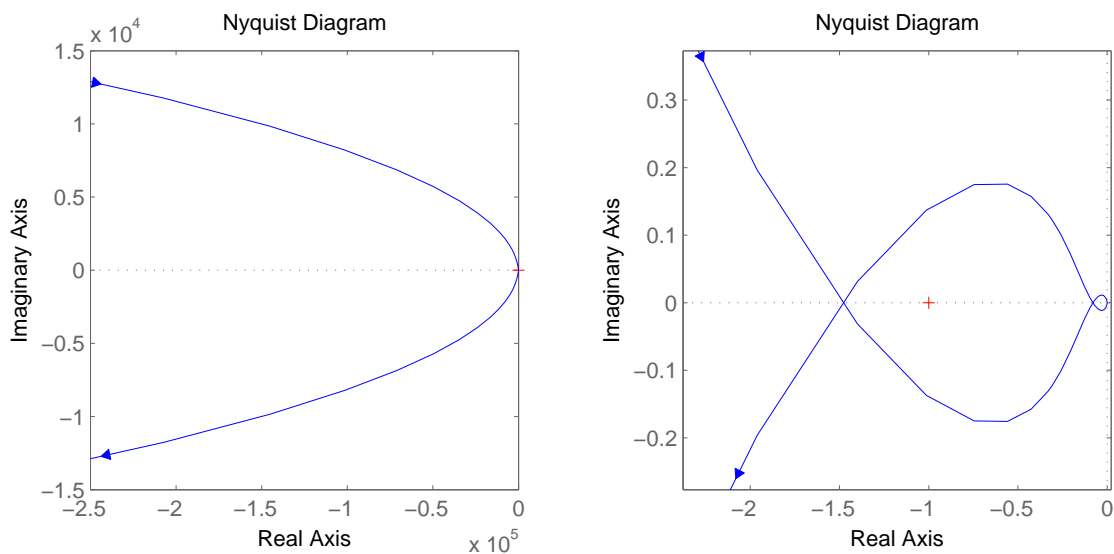
```
100 (s+1)^2
```

```
-----
s^2 (s+0.1) (s+10)^2
```

Frekvenční charakteristiku v komplexní rovině vykreslíme příkazem

```
>> nyquist(F0)
```

Objeví se nám průběh, který je na obrázku 6.14 vlevo. Na základě tohoto průběhu bychom mohli říci, že je uzavřený systém nestabilní, protože  $F_0(p)$  nemá nestabilní póly a počet oběhů kolem bodu  $(-1; 0)$  je dvakrát v záporném směru. Pokud si ale zvětšíme průběh  $F_0(j\omega)$  kolem bodu  $(-1; 0)$  zjistíme, že je předchozí závěr špatný. Na obrázku 6.14 vpravo



Obrázek 6.14: Demonstrace příkazu `nyquist` v Matlabu

vidíme přiblížený průběh. Ve skutečnosti je uzavřený systém pro zadané zesílení  $K_0$  stabilní, protože počet oběhů je roven nule. Dalším přiblížením zjistíme průsečíky se zápornou reálnou osou, které definují oblast stability. Průsečíky jsou přibližně  $-1.476$  a  $-0.0793$ . S uvážením, že průběh je vykreslen pro zesílení  $K_0 = 10$  získáme rozsah zesílení, pro které je uzavřený obvod stabilní.  $K_0 \in (1/1.476 \cdot 10; 1/0.0793 \cdot 10) = (6.8; 126)$ . Získaný interval koresponduje s intervalem získaným Routh-Schurovým kritériem v příkladu 6.8. Pokud v Matlabovském okně ukazujícím průběh vykreslený příkazem `nyquist`, najedete na vyobrazený průběh myší a zmáčknete pravé tlačítko, zjistíte informace o reálné a imaginární složce a o odpovídající frekvenci vybraného bodu.

## 6.5 Shrnutí

V této kapitole byly vysvětleny možnosti zjišťování stability zpětnovazebních systémů. V první části byla ukázána možnost použití algebraických kritérií. Byly vypočítány vzorové příklady na použití Hurwitzova a Routh-Schurova kritéria. Nevýhoda těchto kritérií spočívá ve složitosti získaných podmínkových rovnic, které musíme řešit. Odměnou za jejich vyřešení získáváme rozsahy parametrů, pro které je uzavřený obvod stabilní. Druhá, obsáhlejší část se zabývá vysvětlením Nyquistova kritéria stability. Toto kritérium zjišťuje

stabilitu uzavřeného obvodu na základě znalosti frekvenční charakteristiky otevřené smyčky  $F_0(j\omega)$  a počtu nestabilních pólů  $F_0(p)$ . Stěžejní je při určování stability tímto kritériem poloha bodu  $(-1; 0)$ . Jak bude ukázáno v dalším textu, vzdálenost frekvenční charakteristiky od tohoto bodu říká, jak daleko jsme od nestability, což povede k definici pojmu amplitudové, fázové a modulové zásoby stability. Uvedli jsme si zjednodušenou verzi kritéria pro případ, že  $F_0(p)$  neobsahuje nestabilní póly. To vedlo na možnost určování stability v logaritmických souřadnicích. Kreslení frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích je jednodušší než v komplexní rovině. Tento způsob bude v následujícím textu použit při syntéze regulačních obvodů metodou standardních tvarů frekvenční charakteristiky.

## 6.6 Kontrolní otázky

**Otázka 6.1** *Vysvětlete pojmy charakteristický polynom a charakteristická rovnice.*

**Otázka 6.2** *Určete charakteristický polynom obvodu s odchytkovým regulátorem s přenosem  $F_R(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ . Přenos soustavy je  $F_S(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$*

**Otázka 6.3** *Z jakého přenosu zjišťuje Nyquistovo kritérium stabilitu zpětnovazebního obvodu?*

**Otázka 6.4** *Co je to mapování uzavřené křivky z roviny  $p$  do roviny  $F$ ?*

**Otázka 6.5** *Jak je definována Nyquistova křivka a její modifikovaná varianta?*

**Otázka 6.6** *V čem se liší Nyquistovo kritérium stability od algebraických kritérií stability?*

**Otázka 6.7** *Jak zní Nyquistovo kritérium stability a jaké jsou podmínky jeho použití?*

**Otázka 6.8** *Jak se projeví nuly v počátku na průběh frekvenční charakteristiky kolem počátku  $\omega = 0$ ?*

**Otázka 6.9** *Jak zní zjednodušené Nyquistovo kritérium stability?*

**Otázka 6.10** *Jak zní zjednodušené Nyquistovo kritérium stability v logaritmických souřadnicích?*

**Otázka 6.11** *Lze použít Nyquistovo kritérium stability pro systémy s dopravním zpožděním?*

## 7 Analýza dynamických vlastností regulačních obvodů

Analýzou statických vlastností jsme se zabývali v kapitolách 5.2 a 5.3. Měli jsme tím na mysli trvalé ustálené hodnoty, tedy stavy po odeznění přechodných dějů. Při řízení dynamických systémů nás kromě statických vlastností zajímá také, a to někdy zejména, chování v přechodných dějích. Zde nás zajímá rychlost odeznění, maximální překmit a kmitavost přechodného děje. Těmto parametrům se souhrně říká dynamické vlastnosti. Dynamické vlastnosti lze ovlivnit pomocí jednoho či více parametrů regulátoru. Snahou je nastavit takové parametry regulátoru, které by dosáhly optimálních dynamických vlastností. Slovo "optimální" vyskytující se v minule větě je poněkud vágní pojem. To co je pro někoho optimální, může být pro druhého nevyhovující. Pokud se bavíme o optimalitě, je vždy potřebné uvést hledisko, které bylo při optimalizaci uvažováno. Toto hledisko je často matematicky popsáno kritériální funkcí. Výběr vhodného hlediska, nebo také kritériální funkce je nedílnou a velmi důležitou součástí procesu návrhu regulátoru. Nevhodná volba kritéria může mít za následek špatné chování ve srovnání s jinou volbou kritéria. Tato kapitola nás seznámí se zjišťováním dynamických vlastností podle následujících hledisek

- z odezev v časové oblasti
- z průběhu frekvenčních charakteristik
- z rozložení nul a pólů v komplexní rovině

### 7.1 Integrální kritéria kvality regulace

Integrální kritéria kvality regulace zjišťují kvalitu nastavení parametrů regulátoru v časové oblasti. Vychází se z průběhu regulační odchylky  $e(t)$ , kterou získáme z odezvy regulačního obvodu na skokovou změnu žádané hodnoty. Postupně se zde popíšeme tyto integrální kritéria.

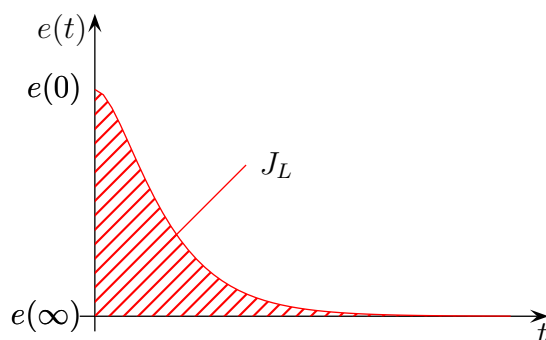
- Lineární kritérium
- Usměrněné lineární kritérium
- Kvadratické kritérium
- ITAE kritérium

#### 7.1.1 Lineární integrální kritérium

Lineární integrální kritérium spočítá plochu mezi průběhem regulační odchylky  $e(t)$  a ustálenou odchylkou  $e(\infty)$ . Této ploše se říká lineární regulační plocha. Matematicky je plocha ohraničená nějakou křivkou definována integrálem

$$J_L = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)] dt \quad (7.1)$$

Odečtení ustálené odchylky  $e(\infty)$  zajišťuje konvergenci integrálu k nějaké konečné hodnotě. Bez odečtení ustálené odchylky by v případě její nenulovosti vycházela nekonečná



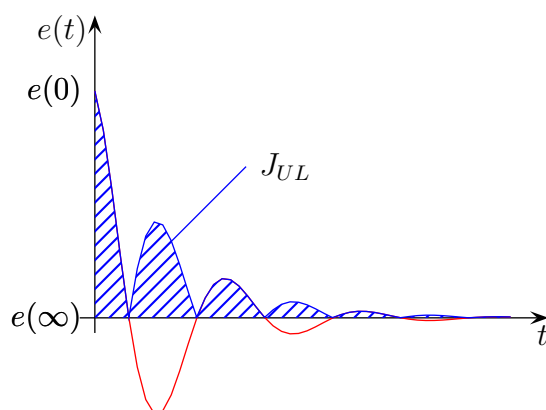
**Obrázek 7.1:** Lineární regulační plocha

hodnota kritéria  $J_L$ . Víme, že obvody s astatismem alespoň prvního řádu mají nulovou ustálenou odchylku  $e(\infty) = 0$ , čímž se předchozí rovnice (7.1) zjednoduší na tvar

$$J_L = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (7.2)$$

Stejné úvahy platí i pro případ ostatních integrálních kritérií. Z hlediska výpočtu integrálu je nutné, aby byl systém **aperiodický**. Pokud by tomu tak nebylo, plochy pod osou  $e(\infty)$  by se odečítali, čímž by se nesprávně snižovala hodnota kritéria a dostali bychom zkreslený výsledek. Řešení v tomto případě představuje použití modifikovaného kritéria usměrněné lineární plochy, ve kterém používáme namísto rozdílu  $[e(t) - e(\infty)]$  jeho absolutní hodnotu

$$J_{UL} = \int_0^{\infty} |e(t) - e(\infty)| dt \quad (7.3)$$



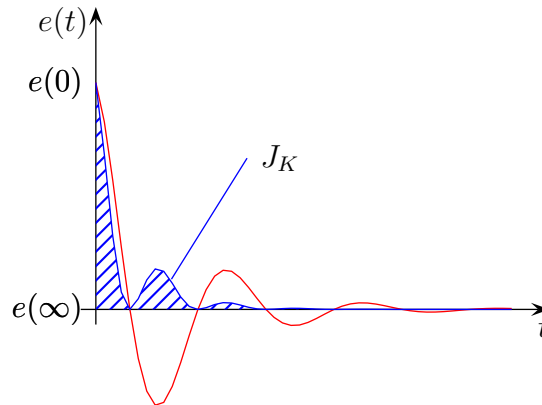
**Obrázek 7.2:** Usměrněná lineární plocha

Tím se plochy pod osou  $e(\infty)$  přičítají a logicky zhoršují hodnotu kritéria. Pozorný čtenář může namítnout, proč jsme nedefinovali pouze usměrněnou variantou lineárního integrálního kritéria. Důvod spočívá v nelinearitě absolutní hodnoty, která znemožňuje analytický výpočet, který je v případě prostého lineárního kritéria a aperiodického průběhu možný.

### 7.1.2 Kvadratické integrální kritérium

Toto kritérium vyjadřuje kvadratickou regulační plochu. Je definováno integrálem

$$J_K = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)]^2 dt \quad (7.4)$$



**Obrázek 7.3:** Hodnota kvadratického kritéria

V případě tohoto kritéria nás netrápí záporné odchylky, neboť jejich kvadrát je kladné číslo. Pro systémy s astatismem, kdy je trvalá ustálená odchylka nulová platí zjednodušený vztah

$$J_K = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (7.5)$$

Z průběhu kvadratické funkce je zřejmé, že toto kritérium přikládá větší váhu větším odchylkám. Jedná se o hodnoty odchylky  $e(t)$  z počátku přechodného děje (obrázek 7.3). Při minimalizaci kvadratického kritéria dojde k tomu, že se systém snaží co nejrychleji vylimínovat právě tyto odchylky na počátku, což následně přináší relativně velký překmit a kmitavost odchylky, což bývá považováno jako nevýhoda kvadratického kritéria. Toto kritérium je oblíbené z důvodu možnosti jednoduchého výpočtu. Existuje několik možností pro určení kvadratického kritéria, z nichž některé si popíšeme v následujících podkapitolách.

- analytický výpočet výpočtem inverzní Laplaceovy transformace obrazu odchylky s následnou integrací podle (7.4)
- přímý analytický výpočet pomocí reziduové věty
- výpočet pomocí Nekolného doplňku k Routh-Schurově algoritmu
- pomocí simulace



### Přímým výpočtem pomocí reziduové věty

Definiční integrál (7.5) můžeme chápat jako funkci horní meze, která v limitě přejde na  $J_k$ .

$$J_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^2(t) dt$$

a podle věty o konečné hodnotě lze psát

$$J_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^2(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \{e^2(t)\} \quad (7.6)$$

V Laplaceově transformaci součinu dvou funkcí v čase odpovídá konvoluce obrazů, takže

$$\{e(t) \cdot e(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} E(p-q)E(q) dq$$

a po dosazení do (7.6) máme

$$J_k = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} E(p-q)E(q) dq = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} E(-q)E(q) dq \quad (7.7)$$

Integrál na pravé straně rovnice (7.7) nahradíme integrálem po uzavřené křivce, a ten je roven  $2\pi j$  násobku sumy residuí v pólech integrované funkce, které leží uvnitř integrační uzavřené křivky. Protože  $E(p)$  musí mít pouze stabilní póly, leží všechny póly  $E(q)$  v levé polorovině a póly  $E(-q)$  v pravé polorovině komplexní roviny. Jako integrační dráhu můžeme zvolit imaginární osu uzavřenou půlkružnicí o nekonečném poloměru. Pak

$$J_k = \sum_{q_i} \text{res } E(-q)E(q)$$

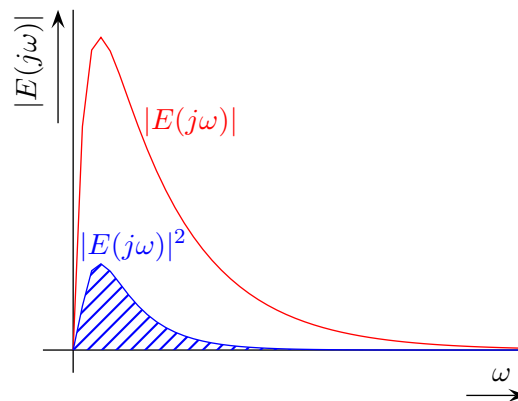
kde  $q_i$  jsou póly funkce  $E(q)$ . Nyní je zřejmé, proč jsme na počátku předpokládali, že póly této funkce jsou známé.

Integrál na pravé straně rovnice (7.7) lze vyčíslit také tak, že za integrační dráhu vezmeme imaginární osu  $c = 0$ . Vzhledem k symetrii stačí integrovat v mezích  $0 < \omega < \infty$  a výsledek násobit dvěma:

$$J_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(-j\omega)E(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [E(-j\omega)]^2 d\omega$$

To znamená, že kvadratická integrální plocha je úměrná ploše vymezené funkcí kvadrátu amplitudové frekvenční charakteristiky  $E(j\omega)$  (obrázek 7.4). Tento způsob výpočtu vyžaduje nasazení výpočetní techniky, pomocí které lze výpočet automatizovat.

**Příklad 7.1** Přenos řízení uzavřeného regulačního obvodu je typu statického článku druhého řádu s časovou konstantou  $T = 1$ . Stanovte velikost poměrného tlumení tak, aby systém byl z hlediska kvadratického kritéria optimální.



Obrázek 7.4: Kvadratická integrální plocha

Přenos řízení má tvar

$$F_w(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi p + 1}$$

kde  $\xi$  je poměrné tlumení. Pro obraz odchylky platí

$$E(p) = W(p)[1 - F_w(p)] = \frac{1}{p} \cdot \frac{p^2 + 2\xi p}{p^2 + 2\xi p + 1} = \frac{p + 2\xi}{p^2 + 2\xi p + 1}$$

jeho póly jsou

$$p_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Pro kvadratickou plochu platí

$$J_k = \sum_{p_1, p_2} \text{res } E(p)E(-p) = \sum_{p_1, p_2} \frac{4\xi^2 - p^2}{p[4p^2 + 2(2 - 4\xi^2)]}$$

Po dosazení hodnot pólů dostaneme rovnici

$$J_k = \frac{2\xi^2 + 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1} + 1}{(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi)(-8\xi\sqrt{\xi^2 - 1})} - \frac{2\xi^2 - 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1} + 1}{(\sqrt{\xi^2 - 1} + \xi)(8\xi\sqrt{\xi^2 - 1})} = \frac{4\xi^2 + 1}{4\xi}$$

Tuto funkci je nyní třeba derivovat podle tlumení  $\xi$  a splnit podmínku

$$\frac{dJ_k}{d\xi} = \frac{4\xi^2 - 1}{4\xi^2} = 0$$

Z této podmínky určíme optimální hodnotu  $\xi_{kik} = 0.5$ . Hodnota kritéria je

$$J_k(\xi_{kik} = 0.5) = 1$$

### Nekolného doplněk Routh-Schurova algoritmu

Analytický výpočet kvadratického kritéria (7.4) je značně pracný. Mnohem jednodušší je použití Nekolného doplněku Routh-Schurova kritéria, který dokáže určit hodnotu kvadratického kritéria pomocí jednoduchého a algoritmizovatelného postupu.

Pro přenos odchyly jsme si již dříve vyjádřili vztah

$$F_e(p) = \frac{1}{1 + F_0(p)} = \frac{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (7.8)$$

kde  $b_n = a_n$  (stupeň čitatele soustavy je alespoň o jedničku menší než stupeň jmenovatele) a pro systémy s astatismem v otevřeném obvodu navíc platí  $b_0 = 0$ . Tato podmínka zde platí i pro systémy bez astatismu, neboť v tom případě se používá složitější verze kritéria s  $e(t) - e(\infty)$ , které vynuluje absolutní člen v čitateli. Takže podmínka  $b_0 = 0$  vlastně platí vždy. Obraz odchyly  $E(p)$  jako odezvy regulační odchyly na jednotkový skok řídicí veličiny je dán ve tvaru

$$E(p) = F_e(p) \frac{1}{p} = \frac{b_n p^{n-1} + \dots + b_2 p + b_1}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (7.9)$$

### Nekolného algoritmus pro výpočet kvadratického kritéria

1. Na jmenovatelový polynom  $A(p)$  aplikujeme Routh-Schurův algoritmus, ale neskončíme u řádku se třemi koeficienty, nýbrž pokračujeme až do konce. V případě nestabilního systému nemá smysl pokračovat dál, neboť hodnota kritéria stejně jako odchylyka půjde do nekonečna. Koeficienty, kterými v jednotlivých krocích redukce násobíme podtržené členy, nazveme  $\alpha_i$ .
2. Koeficienty čitatele  $b_i$  napíšeme do řádku, podobně jako jsme to provedli u jmenovatelového polynomu. Jsou-li některé koeficienty nulové, zapíšeme do řádku na jejich místě nuly. Z rovnice (7.9) vyplývá, že je-li stupeň jmenovatele  $n$ , bude mít tento řádek  $n - 1$  koeficientů.
3. Každý druhý koeficient řádku čitatele podtrhneme. Můžeme postupovat opět zprava i zleva, avšak vždy ve stejném smyslu, v jakém byla provedena redukce jmenovatele.
4. Od nepodtržených koeficientů čitatele odečteme podtržené koeficienty jmenovatele, násobené takovým číslem  $\beta_i$ , aby se první nepodtržený koeficient řádku čitatele  $b_n$  anuloval.
5. S takto získaným redukovaným řádkem koeficientů opakujeme celý postup až do konce. V každém kroku  $i$  stanovíme násobící koeficient  $\beta_i$ .
6. Kvadratická regulační plocha je dána vzorcem

$$J_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \quad (7.10)$$

**Příklad 7.2** *K regulované soustavě s přenosem*

$$F_s(p) = \frac{1}{(10p + 1)^2}$$

*byly navrženy tři typy regulátorů*

a) regulátor typu I s přenosem

$$F_{R1} = \frac{0.05}{p}$$

b) regulátor typu PI s přenosem

$$F_{R2} = \frac{0.6(10p + 1)}{p(0.5p + 1)}$$

c) regulátor typu PID s přenosem

$$F_{R3} = \frac{2(10p + 1)^2}{p(0.5p + 1)}$$

Vypočtete kvadratickou regulační plochu pro všechny uvedené regulátory.

### Řešení ad a)

Přenos otevřené smyčky je

$$F_0(p) = \frac{0.05}{p(10p + 1)^2}$$

a přenos odchyly je

$$F_e(p) = \frac{1}{1 + F_0(p)} = \frac{1}{1 + \frac{0.05}{p(10p+1)^2}} = \frac{100p^3 + 20p^2 + p}{100p^3 + 20p^2 + p + 0.05}$$

Obraz odchyly při jednotkovém skoku řízení je roven

$$E(p) = \frac{1}{p} F_e(p) = \frac{100p^2 + 20p + 1}{100p^3 + 20p^2 + p + 0.05}$$

Nyní provedeme redukci jmenovatele a v případě, že systém bude stabilní i redukci čitatele podle Nekolného algoritmu.

100	20	1	0.05	$\alpha_1 = 5$	$\times$	100	20	1	$\beta_1 = 5$
-100	-0.25					-100	-0.25		$\beta_2 = 26.67$
20	0.75	0.05		$\alpha_2 = 26.67$		20	0.75		$\beta_3 = 15$
-20				$\alpha_3 = 15$		-20			$\beta_3 = 15$
	0.75	0.05					0.75		

Protože v tomto případě  $\alpha_i = \beta_i$ , bude

$$I_{k1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \beta_i = \frac{1}{2} (5 + 26.67 + 15) = 23.34$$

### Řešení ad b)

Přenos otevřené smyčky je nyní

$$F_0(p) = \frac{0.6}{p(10p + 1)(0.5p + 1)}$$

a přenos odchyly je

$$F_e(p) = \frac{1}{1 + F_0(p)} = \frac{1}{1 + \frac{0.6}{p(10p+1)(0.5p+1)}} = \frac{5p^3 + 10.5p^2 + p}{5p^3 + 10.5p^2 + p + 0.6}$$

Obraz odchyly při jednotkovém skoku řízení je roven

$$E(p) = \frac{1}{p} F_e(p) = \frac{5p^2 + 10.5p + 1}{5p^3 + 10.5p^2 + p + 0.6}$$

Opět provedeme redukci jmenovatele a v případě, že systém bude stabilní i redukci čitatele podle Nekolného algoritmu.

$\begin{array}{r} 5 \quad \underline{10.5} \quad 1 \quad \underline{0.6} \\ -5 \quad \quad -0.29 \\ \hline 10.5 \quad \underline{0.71} \quad 0.6 \\ -10.5 \quad \quad \quad \quad \\ \hline 0.71 \quad \underline{0.6} \end{array}$	$\alpha_1 = 0.48$  $\alpha_2 = 14.79$  $\alpha_3 = 1.18$	$\begin{array}{r} 5 \quad \underline{10.5} \quad 1 \\ -5 \quad \quad -0.25 \\ \hline 10.5 \quad \underline{0.71} \\ -10.5 \quad \quad \quad \quad \\ \hline 0.71 \end{array}$	$\beta_1 = 0.48$  $\beta_2 = 14.79$  $\beta_3 = 1.18$
---	--	---	---

Obdobně jako v minulém případě platí  $\alpha_i = \beta_i$ , a proto bude

$$I_{k2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \beta_i = \frac{1}{2} (0.48 + 14.79 + 1.18) = 8.23$$

Obvod s PI regulátorem má tedy podle kvadratického kritéria téměř dvojnásobně větší kvalitu regulačního děje.

**Řešení ad c)** Pro přenos otevřené smyčky v tomto případě platí

$$F_0(p) = \frac{2}{p(0.5p + 1)}$$

a pro obraz odchyly

$$E(p) = \frac{0.5p + 1}{0.5p^2 + p + 2}$$

Opět provedeme redukci jmenovatele a čitatele podle Nekolného algoritmu.

$\begin{array}{r} 0.5 \quad \underline{1} \quad 2 \\ -0.5 \quad \quad \quad \quad \\ \hline 1 \quad \underline{2} \\ -1 \quad \quad \quad \quad \\ \hline \end{array}$	$\alpha_1 = 0.5$  $\alpha_2 = 0.5$	$\begin{array}{r} 0.5 \quad \underline{1} \\ -0.5 \quad \quad \quad \quad \\ \hline 1 \end{array}$	$\beta_1 = 0.5$  $\beta_2 = 0.5$
--	--	--	--

Obdobně jako v minulém případě platí  $\alpha_i = \beta_i$ , a proto bude

$$I_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \beta_i = \frac{1}{2} (0.5 + 0.5) = 0.5$$

Obvod s PID regulátorem v tomto příkladě vykazuje podle kvadratického kritéria výrazné zlepšení kvality regulačního děje ve srovnání s I a PI regulátory.

Je zajímavé, že nám ve všech třech případech vyšly stejné koeficienty  $\alpha_i = \beta_i$ . Není těžké dokázat, že k tomuto jevu dochází vždy, pokud je čítec přenosu otevřené smyčky  $F_0(p)$  roven konstantě (nemá nuly). Plyne to přímo z rovnice (7.8), kde se potom shoduje čítec s jmenovatelem až na absolutní člen.

Pro regulační systémy bez astatismu v otevřeném obvodu platí, že mají nenulovou ustálenou odchylku. Abychom dostali smysluplný výsledek kvadratického kritéria, musíme provést výpočet z upravené odchylky

$$\bar{e}(t) = e(t) - e(\infty)$$

Rovnost koeficientů  $\alpha_i = \beta_i$  v tomto případě nenastane nikdy, jak se snadno přesvědčíme převodem do Laplaceovy transformace a dosazením (7.9).

$$\begin{aligned} F_0(p) &= \frac{k}{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0} \\ F_e(p) &= \frac{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0}{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0 + k} \\ E(p) &= \frac{1}{p} F_e(p) = \frac{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0}{b_n p^{n+1} + \dots + b_1 p^2 + (b_0 + k)p} \\ \bar{E}(p) &= E(p) - \frac{e(\infty)}{p} = \frac{b_n [1 - e(\infty)] p^n + \dots + b_1 [1 - e(\infty)] p + b_0 [1 - e(\infty)]}{b_n p^{n+1} + \dots + b_1 p^2 + (b_0 + k)p} \end{aligned}$$

Z výše uvedeného rozboru platí následující zjednodušení. Pokud je čítec  $F_0(p)$  roven konstantě a jmenovatel obsahuje astatismus alespoň prvního řádu, pro výpočet kvadratického kritéria stačí provést pouze redukci jmenovatele a použít vzorec

$$J_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \alpha_i \quad (\text{protože } \alpha_i = \beta_i)$$

**Příklad 7.3** Přenos otevřeného obvodu je

$$F_0(p) = \frac{2(3p + 1)}{p^2(0.1p + 1)}$$

Vypočítejte kvadratickou regulační plochu.

Obraz odchylky je

$$E(p) = \frac{0.1p^2 + p}{0.1p^3 + p^2 + 6p + 2}$$

Provedeme redukci čítele a jmenovatele. Protože v obrazu odchylky chybí absolutní člen v čítec, musíme na jeho místo napsat nulu.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 0.1 \quad \underline{1} \quad 6 \quad \underline{2} \\
 -0.1 \quad -0.2 \\
 \hline
 1 \quad \underline{5.8} \quad 2 \\
 -1 \\
 \hline
 5.8 \quad \underline{2}
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \alpha_1 = 0.1 \\
 \alpha_2 = 0.17 \\
 \alpha_3 = 2.9
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 0.1 \quad \underline{1} \quad 0 \\
 -0.1 \quad -0.2 \\
 \hline
 1 \quad \underline{-0.2} \\
 -1 \\
 \hline
 -0.2
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \beta_1 = 0.1 \\
 \beta_2 = 0.17 \\
 \beta_3 = -0.1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$J_K = \frac{1}{2}(0.1 + 0.17 + 0.0034) = 0.14$$

**Příklad 7.4** *K soustavě s přenosem*

$$F_s(p) = \frac{0.4}{(3p + 1)^3}$$

je připojen regulátor typu *P*, se zesílením  $K_R = 6$ . Vypočtete velikost kvadratické regulační plochy.

Přenos otevřeného obvodu je

$$F_0(p) = K_R F_s(p) = \frac{2.4}{(3p + 1)^3}$$

a obraz odchytky při skokové změně řízení o jedničku je

$$E(p) = \frac{1}{p} \frac{(3p + 1)^3}{(3p + 1)^3 + 2.4} = \frac{1}{p} \frac{27p^3 + 27p^2 + 9p + 1}{27p^3 + 27p^2 + 9p + 3.4}$$

Ustálená odchytka bude podle věty  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$  rovna  $e(\infty) = 1/3.4 = 0.294$ . Musíme proto vytvořit Laplaceův obraz modifikované odchytky

$$\bar{e}(t) = e(t) - 0.294$$

$$\bar{E}(p) = E(p) - \frac{0.294}{p} = \frac{1}{p} \frac{27p^3 + 27p^2 + 9p + 1}{27p^3 + 27p^2 + 9p + 3.4} - \frac{0.294}{p} = \frac{19.06p^2 + 19.06p + 6.35}{27p^3 + 27p^2 + 9p + 3.4}$$

Teprve na tento obraz budeme aplikovat Neukolného algoritmus.

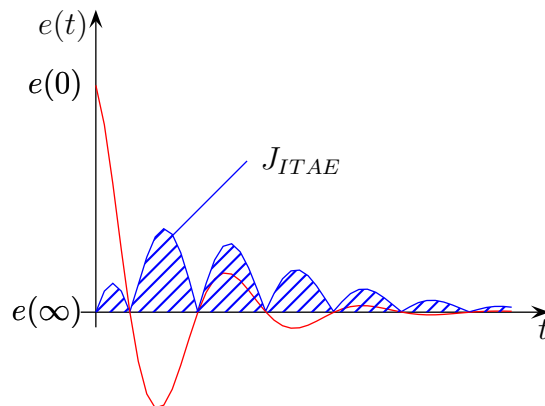
$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 27 \quad \underline{27} \quad 9 \quad \underline{3.4} \\
 -27 \quad -3.4 \\
 \hline
 27 \quad \underline{5.6} \quad 3.4 \\
 -27 \\
 \hline
 5.6 \quad \underline{3.4}
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \alpha_1 = 1 \\
 \alpha_2 = 4.82 \\
 \alpha_3 = 1.65
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 19.06 \quad \underline{19.06} \quad 6.35 \\
 -19.06 \quad -2.41 \\
 \hline
 19.06 \quad \underline{3.94} \\
 -19.06 \\
 \hline
 3.94
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \beta_1 = 0.71 \\
 \beta_2 = 3.4 \\
 \beta_3 = 1.16
 \end{array}
 \end{array}$$

$$J_K = \frac{1}{2}(0.5 + 2.4 + 0.82) = 1.86$$

### 7.1.3 ITAE kritérium

Nevýhodou kvadratického kritéria je kmitavý výsledek odezvy s relativně vysokým překmitem. Tuto nevýhodu odstraňuje další z integrálních kritérií a to ITAE. Název ITAE vychází z anglického Integral of Time multiplied by Absolute value of Error. Kritérium ITAE je definováno vztahem

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} |e(t) - e(\infty)|t dt \quad (7.11)$$



Obrázek 7.5: Hodnota ITAE kritéria

kde  $e(t)$  je časový průběh regulační odchylky,  $e(\infty)$  je trvalá ustálená odchylka a  $t$  je čas. V případě nulové trvalé ustálené odchylky se kritérium zjednoduší na tvar

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} |e(t)|t dt \quad (7.12)$$

ITAE patří mezi váhová kritéria. Váha odchylky narůstá lineárně s časem. Analytický výpočet prakticky není možný kvůli přítomnosti nelineární funkce absolutní hodnoty. Pro výpočet ITAE kritéria se používá simulace viz. obrázek 7.6.

Z odchylky je nejprve provedena absolutní hodnota. Poté je vynásobena časem, který je v daném schématu realizován integrátorem s jednotkovým vstupem. Výsledek násobení se vede na integrátor, na jehož výstupu je po odeznění přechodného děje výsledek ITAE kritéria. Integrace se v praxi nepočítá do  $t \rightarrow \infty$ , ale skončí se v čase, kdy se již hodnota kritéria nemění.

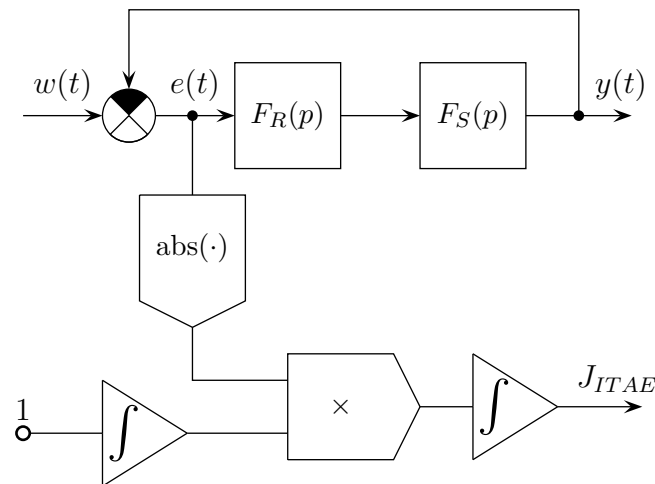
Ikdyž není možné ITAE kritérium vyjádřit analytickým výpočtem, tak se dá použít hodnot získaných z opakovaných simulací pro ladění konstant regulátoru pomocí gradientních metod nebo metod nelineární optimalizace. V případě, že je možné experimentovat se skutečným zařízením, je možné brát odchylku  $e(t)$  přímo ze vstupu regulátoru.

### 7.1.4 Použití programu Matlab

**Příklad 7.5** *K soustavě s přenosem*

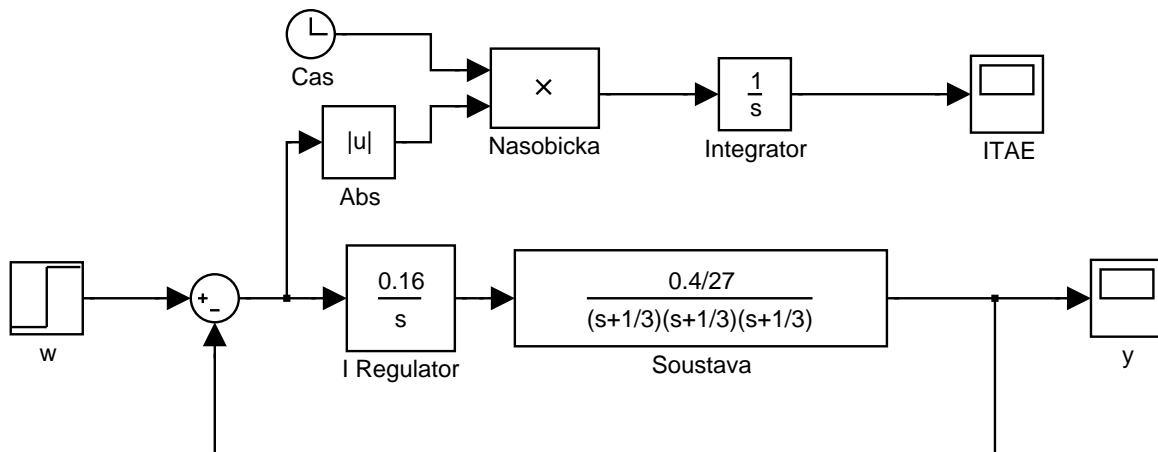
$$F_s(p) = \frac{0.4}{(3p + 1)^3}$$





**Obrázek 7.6:** Blokové schéma vyhodnocující ITAE kritérium

je připojen regulátor typu I, s přenosem  $F_R(p) = \frac{K_I}{p}$ . Pomocí simulace v Simulinku určete hodnotu ITAE kritéria pro tři různá zesílení  $K_I = 0.1$ ,  $K_I = 0.2$  a  $K_I = 0.3$



**Obrázek 7.7:** Simulinkovské schéma pro vyhodnocení ITAE kritéria

Simulační schéma je ukázáno na obrázku 7.7. Kromě soustavy a regulátoru, které jsou uzavřeny zpětnou vazbou, je zde realizováno vyhodnocení ITAE kritéria, které je blokově ukázáno na obrázku 7.6. Nastavíme délku simulace tak, aby na konci simulace se již hodnota na výstupu integrátoru více neměnila. V našem případě jsme nastavili čas simulace 300s. Postupně měníme zesílení  $K_I$  a získáváme výsledky ITAE kritéria

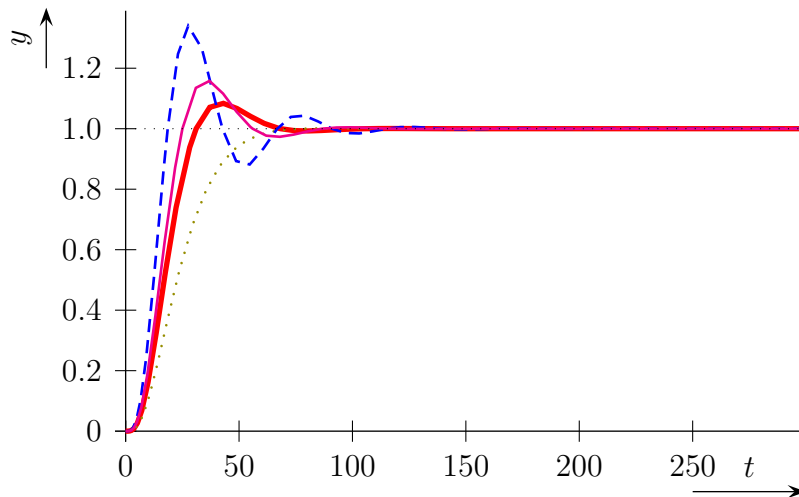
$$J_{ITAE}(K_I = 0.1) = 406.5$$

$$J_{ITAE}(K_I = 0.2) = 283.3$$

$$J_{ITAE}(K_I = 0.3) = 427.9$$

Vidíme, že v rozsahu  $K_I \in (0.1, 0.3)$  zřejmě bude ležet zesílení, pro které bude hodnota ITAE kritéria minimální. Postupným zkoušením můžeme dojít k hodnotě  $K_I = 0.16$ , pro kterou je hodnota kritéria

$$J_{ITAE}(K_I = 0.16) = 266$$



**Obrázek 7.8:** Průběhy výstupu pro různé hodnoty zesílení  $K_I$

Na obrázku 7.8 jsou zobrazeny průběhy výstupní veličiny. Plnou tučnou čarou je vyznačen optimální průběh. Jak je vidět, dává ITAE kritérium podstatně lepší výsledky než kvadratické integrální kritérium, neboť překmit je v tomto případě přijatelný, stejně jako celková kmitavost výstupu. Tečkovaný průběh odpovídá zesílení  $K_I = 0.1$ , plnou tenkou čarou je  $K_I = 0.2$  a čárkovaně je průběh odpovídající  $K_I = 0.3$ .

**Příklad 7.6** Použitím funkce `fminsearch` zkuste najít optimální hodnotu zesílení  $K_I$ .

Funkce `fminsearch` vyžaduje jako první parametr název funkce, jejíž vstupem je vektor parametrů, pro který vrací hodnotu kritéria. Jako druhý parametr se zadává počáteční odhad řešení.

Z tohoto důvodu musíme napsat funkci `eval_itae`, která spočítá hodnotu ITAE kritéria pro zadanou hodnotu zesílení  $K_I$ . Použijeme simulinkové schéma z obrázku 7.7, kde v bloku s názvem ITAE nastavíme ukládání vykreslovaných dat do proměnné s názvem `dataITAE`, která má formát pole. Samotná funkce může potom vypadat následovně

```
function valITAE = eval_itae(k_i)

open_system('ITAE');
reg_bl = find_system(gcs,'Name','I Regulator');
set_param(reg_bl{1},'Numerator',[' num2str(k_i) ']);
sim('ITAE');
valITAE = dataITAE(length(dataITAE),2);
```

Potom stačí zavolat funkci `fminsearch` se zvoleným počátečním odhadem minima, v našem případě třeba 0.1

```
>> fminsearch('eval_itae',0.1)
ans =
    0.1601
```

V tomto jednoduchém příkladě jsme hledali jeden neznámý parametr. Samozřejmě bychom mohli při použití složitějšího regulátoru podobným způsobem hledat několik neznámých parametrů.

Zkuste se zamyslet nad tím, jakým způsobem by se muselo upravit použité simulinkové schéma, kdybychom se snažili nalézt zesílení proporcionálního regulátoru k zadané soustavě, které by bylo optimální z hlediska ITAE kritéria (bude v takovém uspořádání nulová ustálená odchylka?).

### 7.1.5 Kontrolní otázky

**Otázka 7.1** *Jaká znáte kritéria kvality regulace, které se používají v časové oblasti?*

**Otázka 7.2** *Jmenujte výhody a nevýhody integrálního kvadratického kritéria.*

**Otázka 7.3** *Jaké jsou výhody a nevýhody ITAE kritéria.*

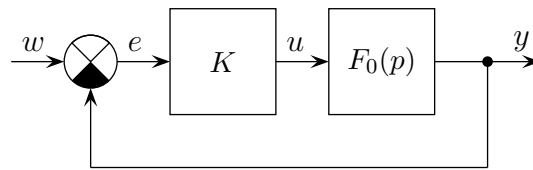
**Otázka 7.4** *K čemu se používá Nekolného doplněk k Routh-Schurovu kritériu stability? Popište použití tohoto algoritmu.*

**Otázka 7.5** *Nakreslete bloková schémata, která by se dala použít pro určení kvadratického integrálního kritéria a usměrněné lineární plochy.*

## 7.2 Metoda kořenového hodografu

Kořenový-hodograf je zobrazení průběhu pólů charakteristické rovnice v závislosti na nějakém proměnlivém parametru komplexní rovině. Všechny póly se v závislosti na tomto parametru pohybují v komplexní rovině po křivkách, které nazýváme větve kořenového hodografu. Základní úloha kořenového hodografu spočívá ve zjištění větví kořenového hodografu systému v závislosti na proměnlivém zesílení  $K = 0 \cdots \infty$ . To odpovídá stavu, kdy je soustava řízena proporcionálním regulátorem se zesílením  $K$  a my chceme vědět, jak se změní poloha pólů charakteristické rovnice, pokud budeme měnit velikost tohoto zesílení. Množinu pravidel, které umožní přibližně nakreslit větve kořenového hodografu vyvinul Walter Evans v 50 letech minulého století a nazval ji metodou kořenového hodografu. Tato metoda se také nazývá metoda geometrického místa kořenů, protože její křivky určují geometrická místa kořenů charakteristické rovnice. Hlavní důvod pro vznik této metody spočívá v tom, že kořeny přenosu otevřené smyčky  $F_0(p)$  jsou většinou známy, kdežto kořeny charakteristické rovnice, které určují chování zpětnovazebního obvodu, známy nejsou a jejich řešení je ve většině případů obtížné.

Pro potřeby odvození metody GMK uvažujme regulační schéma na obrázku 7.9.



**Obrázek 7.9:** Regulační schéma použité pro odvození metody GMK

Pro přenos žádané hodnoty platí vztah

$$F_w(p) = \frac{K F_0(p)}{1 + K F_0(p)}$$

Póly tohoto přenosu jsou určeny kořeny charakteristické rovnice, tedy kořeny jmenovatele

$$1 + K F_0(p) = 0 \quad (7.13)$$

jejichž poloha závisí na proměnném zesílení  $K$ . Řešení rovnice (7.13) je obtížné. Z tohoto hlediska je výhodnější její úprava na

$$F_0(p) = -\frac{1}{K}$$

Pokud je zesílení  $K$  kladné a reálné, pak je možné tuto rovnici rozepsat na dvě rovnice

$$|F_0(p)| = \frac{1}{K} \quad (7.14)$$

$$\angle(F_0(p)) = \text{lichý násobek } 180^\circ = 180^\circ + i360^\circ \quad \text{kde } i = 0, 1, \dots, \infty$$

Uvažujme, že existuje bod ve kterém platí druhá z těchto podmínek. Potom nezávisle na první podmínce můžeme říci, že tento bod je bodem kořenového hodografu, protože bude určitě existovat takové zesílení  $K$ , které zajistí splnění i první podmínky.

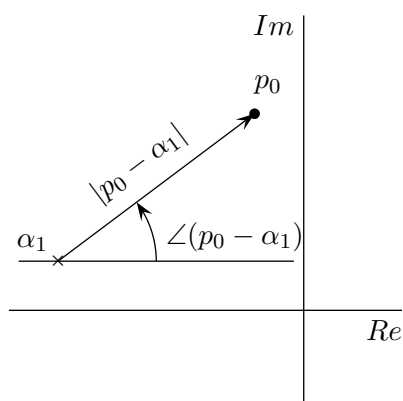
### 7.2.1 Grafické určení hodnoty přenosu

Při stanovení pravidel pro konstrukci kořenového hodografu budeme často potřebovat graficky určit hodnotu přenosu v nějakém bodě. Uvažujme, že chceme určit hodnotu přenosu otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{k(p - \beta_1)(p - \beta_2) \dots (p - \beta_m)}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \dots (p - \alpha_n)} \quad (7.15)$$

v zadaném bodě  $p = p_0$ . Pak

$$F_0(p_0) = \frac{k(p_0 - \beta_1)(p_0 - \beta_2) \dots (p_0 - \beta_m)}{(p_0 - \alpha_1)(p_0 - \alpha_2) \dots (p_0 - \alpha_n)} \quad (7.16)$$



Obrázek 7.10: Výpočet přenosu v bodě  $p_0$ .

se zde vyskytují právě a pouze tyto operace. Převěďme rovnici (7.16) tak, aby se v něm vyskytovali komplexní čísla v goniometrickém tvaru.

$$F_0(p_0) = \frac{k|p_0 - \beta_1|\angle(p_0 - \beta_1)|p_0 - \beta_2|\angle(p_0 - \beta_2) \cdots |p_0 - \beta_m|\angle(p_0 - \beta_m)}{|p_0 - \alpha_1|\angle(p_0 - \alpha_1)|p_0 - \alpha_2|\angle(p_0 - \alpha_2) \cdots |p_0 - \alpha_n|\angle(p_0 - \alpha_n)} \quad (7.18)$$

Řešení rovnice s komplexními čísly se dá rozdělit na dvě rovnice s reálnými čísly

$$|F_0(p_0)| = \frac{|k||p_0 - \beta_1||p_0 - \beta_2| \cdots |p_0 - \beta_m|}{|p_0 - \alpha_1||p_0 - \alpha_2| \cdots |p_0 - \alpha_n|} \quad (7.19)$$

$$\angle(F_0(p_0)) = \angle(p_0 - \beta_1) + \cdots + \angle(p_0 - \beta_m) - \angle(p_0 - \alpha_1) - \cdots - \angle(p_0 - \alpha_n) \quad (7.20)$$

V rovnici (7.20) uvažujeme  $k > 0$ , jinak by se k výslednému úhlu  $\angle(F_0(p_0))$  muselo přičíst  $180^\circ$ .

Předchozí vzorce umožní jednoduše graficky určit hodnotu přenosu ve zvoleném bodě  $p_0$ .

### 7.2.2 Soubor pravidel pro konstrukci kořenového hodografu

1. **Symetrie.** Kořenový hodograf je symetrický kolem reálné osy, protože komplexní nuly a póly se vyskytují v komplexně sdružených párech.
2. **Počet větví.** Kořenový hodograf obsahuje  $n$  větví.
3. **Segmenty na reálné ose.** Část reálné osy je větví kořenového hodografu, pokud napravo od ní leží na reálné ose lichý počet nul a pólů.
4. **Počátky a konce větví.** Každá větev začíná pro  $K = 0$  v pólu  $F_0(p)$  a končí pro  $K \rightarrow \infty$  v nule  $F_0(p)$ . Je-li v přenosu  $F_0(p)$  více pólů než nul, pak  $(n - m)$  větví odchází do nekonečna podél přímkových asymptot.

Na každou závorku reprezentující komplexní číslo se také můžeme dívat jako na vektor. Uvažujme například vektor  $(p_0 - \alpha_1)$ . Jeho velikost je  $|p_0 - \alpha_1|$  a úhel, který svírá s kladnou částí reálné osy je  $\angle(p_0 - \alpha_1)$ . Celá situace je znázorněna na obrázku 7.10. Komplexní číslo  $(p_0 - \alpha_1)$  se dá převést na goniometrický tvar

$$(p_0 - \alpha_1) = |p_0 - \alpha_1|\angle(p_0 - \alpha_1) \quad (7.17)$$

Jak víme z matematiky, je goniometrický tvar komplexních čísel vhodný pro jejich vzájemné násobení a dělení. Pokud se podíváme na rovnici (7.16) tak vidíme, že

5. **Poloha asymptot.** Výše zmíněné přímkové asymptoty se protínají na reálné ose v bodě  $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i}{n-m}$  a svírají s kladnou reálnou poloosou úhel  $\varphi = \frac{180^\circ + i360^\circ}{n-m}$ , kde  $i = 0, \dots, n - m - 1$ .
6. **Průsečík s imaginární osou.** Hodnota  $K$ , pro kterou prochází větve kořenového hodografu imaginární osou se dá určit pomocí algebraických kritérií stability, t.j. pomocí Hurwitzova nebo Routh-Schurova kritéria.
7. **Úhel v komplexní nule nebo pólu** Úhel tečny se kterým vychází větev kořenového hodografu z komplexního pólu  $\alpha_k$  se vypočítá jako  $\gamma_k = 180^\circ + i360^\circ - \sum_{i=1, i \neq k}^n \angle(\alpha_k - \alpha_i) + \sum_{i=1}^m \angle(\alpha_k - \beta_i)$  Podobně, úhel tečny se kterým vchází větev kořenového hodografu do komplexní nuly  $\beta_k$  se vypočítá jako  $\delta_k = 180^\circ + i360^\circ - \sum_{i=1}^n \angle(\beta_k - \alpha_i) + \sum_{i=1, i \neq k}^m \angle(\beta_k - \beta_i)$ .
8. **Průsečík s reálnou osou** Průsečík větve kořenového hodografu s reálnou osou se většinou analyticky vyřešit nedá, řeší se proto iterativně (viz. Kapitola 7.2.7).

Pravidla jsou seřazena podle důležitosti. Obecně můžeme říci, že prvních pět pravidel je pro přibližnou konstrukci kořenového hodografu nejdůležitějších. Další tři pouze zpřesňují tuto přibližnou konstrukci. V následujících podkapitolách si dokážeme platnost výše popsaných pravidel.

### 7.2.3 Segmenty na reálné ose

**Body na reálné ose jsou větví kořenového hodografu, jestliže napravo od nich leží lichý počet nul a pólů přenosu otevřené smyčky  $F_0(p)$ .**

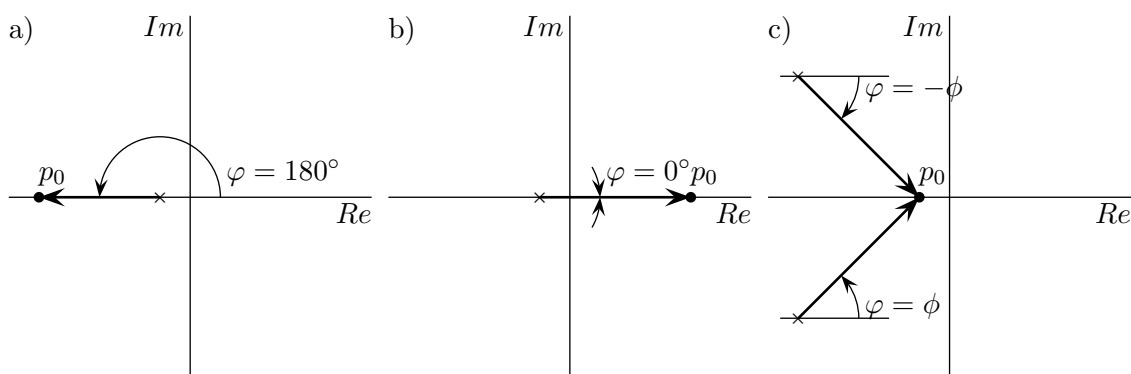
Tato podmínka nám velmi jednoduše umožní určit, které body reálné osy jsou větví kořenového hodografu a které nikoliv. Z obrázku 7.11 plyne, proč tato podmínka platí.

Vycházíme z toho, že pokud má přenos otevřené smyčky  $F_0(p)$  komplexní nuly nebo póly, tak se vyskytují vždy ve dvojici a to jako komplexně sdružené. Z obrázku 7.11 c) je vidět, že pokud jeden pól (nula) z této dvojice přispívá úhlem  $\varphi = \phi$ , tak druhý z dvojice přispívá úhlem  $\varphi = -\phi$ . Výsledný příspěvek této dvojice je tedy  $0^\circ$ .

Pokud chceme vypočítat hodnotu přenosu uzavřené smyčky v nějakém bodě na reálné ose a zajímá nás příspěvek úhlu od nějakého pólu přenosu otevřené smyčky  $F_0(p)$ , který rovněž leží na reálné ose, pak záleží na tom, jestli je tento bod nalevo nebo napravo od pólu. Je-li nalevo, pak je příspěvek daný úhlem  $180^\circ$  (7.11 a)). Je-li napravo, pak je příspěvek změny úhlu  $0^\circ$  (7.11 b)). To stejné platí v případě, kdy sledujeme příspěvek od nuly přenosu otevřené smyčky  $F_0(p)$ . Aby byl testovaný bod bodem kořenového hodografu, pak zde musí celkový úhel vyhovovat podmínce  $180^\circ \pm i360^\circ$ . Tato podmínka je splněna v případě, že je nalevo od testovaného bodu lichý počet nul nebo pólů. Je jedno, jestli do tohoto počtu zahrnujeme komplexně sdružené nuly či póly, neboť jejich společný příspěvek je  $0^\circ$ , jak bylo ukázáno výše.

### 7.2.4 Počátky a konce větví

Větve kořenového hodografu jsou spojité křivky, které začínají v  $n$  pólech přenosu otevřené smyčky  $F_0(p)$  pro  $K = 0$ .  $m$  větví kořenového hodografu se



Obrázek 7.11: Příspěvek k úhlu v testovacím bodě na reálné ose

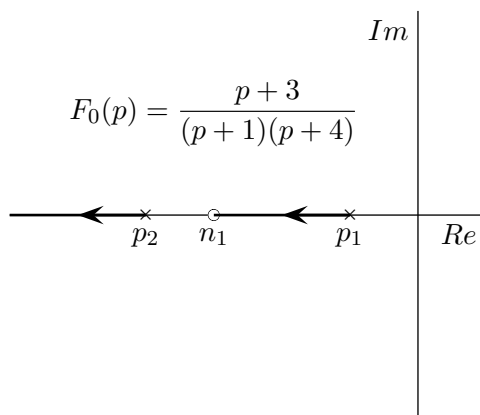
pro  $K \rightarrow \infty$  blíží  $m$  nulám přenosu  $F_0(p)$ . Protože většinou platí, že  $n > m$ , pak se zbývající větve vzdalují od počátku do nekonečna.

**Příklad 7.7** Mějme přenos otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{p + 3}{(p + 1)(p + 4)}$$

Nakreslete průběh větví kořenového hodografu.

Řešení tohoto příkladu je ukázáno na obrázku 7.12.



Obrázek 7.12: Příklad demonstrující počátek a konec větví kořenového hodografu

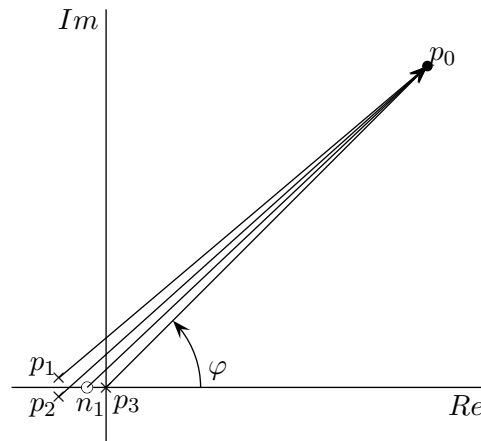
### 7.2.5 Směr asymptot

Uvažujme, že přenos otevřené smyčky  $F_0(p)$  má  $n$  pólů a  $m$  nul.

Pro hodnotu zesílení  $k$  jdoucí do nekonečna,  $m$  pólů konverguje k nulám. Zbytek pólů, t.j.  $n - m$  konverguje do nekonečna. Jejich konvergence není

náhodná. Póly se pohybují tak, že se blíží k přímkovým asymptotám, jejichž úhel je určen následující rovnicí

$$\varphi = \frac{180^\circ + i360^\circ}{n - m} \quad \text{pro } i = 0, \dots, n - m - 1 \quad (7.21)$$



**Obrázek 7.13:** Výpočet přenosu v bodě vzdáleném od všech nul a pólů

Proč tomu tak opravdu je, ukazuje obrázek 7.13. Pokud je bod  $p_0$  dostatečně vzdálen od všech pólů a nul přenosu otevřené smyčky, pak úhel vektorů, které jsou dány jednotlivými póly a bodem  $p_0$  je pro všechny póly přibližně stejný, roven úhlu  $\varphi$ . Stejně to platí i s nulami. Úhel přenosu uzavřené smyčky je podle (7.20) dán součtem příspěvků úhlů nul od kterého se odečítá příspěvek úhlů pólů. V našem případě přibližně platí

$$m\varphi - n\varphi = (m - n)\varphi = -(n - m)\varphi$$

Pokud je asymptota místem kořenového hodografu, pak zde platí podmínka (7.14)

$$-(n - m)\varphi = 180^\circ \pm i360^\circ$$

$i$  násobek úhlu  $360^\circ$  je zde proto, abychom postihli všechny řešení, neboť asymptot, které jdou do nekonečna, je  $n - m$ . Vyjádřením  $\varphi$  z minulé rovnice získáme rovnici (7.21). Uveďme si pro osvojení několik příkladů. V případě, že je rozdíl  $n - m = 1$ , pak je asymptota záporná reálná poloosa. Pro případ  $n - m = 2$  jsou asymptoty dvě, obě jsou rovnoběžné s imaginární osou.

Obecně lze říci, že asymptoty jsou rozmístěny symetricky kolem reálné osy. Vytváří pravidelnou hvězdicu s  $n - m$  cípy, protože úhly mezi asymptotami jsou stejné, která je symetrická kolem reálné osy, protože i celý kořenový hodograf je takto symetrický.

### 7.2.6 Střed asymptot

Střed asymptot leží na reálné ose v bodě

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i}{n - m} \quad (7.22)$$



Střed asymptot má smysl počítat pouze v případě, že  $n - m > 1$ . Pokud  $n = m$ , končí všechny póly v nulách přenosu  $F_0(p)$ . Pro  $n - m = 1$  nám jeden pól odchází po reálné ose do  $-\infty$ , takže zde také žádný střed není. Skutečnost, že střed asymptot leží na reálné ose nás nijak nepřekvapuje, protože kořenový hodograf je symetrický kolem reálné osy.

Při odvození polohy středu asymptot vyjdeme z rovnic (7.13) a (7.16). Jejich sloučením dostaneme

$$1 + K \frac{k(p - \beta_1)(p - \beta_2) \cdots (p - \beta_m)}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \cdots (p - \alpha_n)} = 0 \quad (7.23)$$

Roznásobením čitatele a jmenovatele dostaneme

$$1 + K \frac{k(p^m - \sum_{i=1}^m \beta_i p^{m-1} + \cdots)}{p^n - \sum_{i=1}^n \alpha_i p^{n-1} + \cdots} = 0 \quad (7.24)$$

Nyní podělíme jmenovatele čitatelem (dělíme polynom polynomem)

$$\begin{aligned} p^n - \sum_{i=1}^n \alpha_i p^{n-1} + \cdots : p^m - \sum_{i=1}^m \beta_i p^{m-1} + \cdots = \\ = p^{n-m} + \left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i\right) p^{n-m-1} + \cdots \end{aligned} \quad (7.25)$$

Dosazením (7.25) do rovnice (7.24) dostaneme

$$1 + \frac{Kk}{p^{n-m} + \left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i\right) p^{n-m-1} + \cdots} = 0 \quad (7.26)$$

Pokud budeme uvažovat velké  $p$ , pak se dá jmenovatel přibližně nahradit prvními dvěma členy.

Chceme určit  $\sigma$  jako průsečík asymptot s reálnou osou. Uvažujme, že všechny vektory jdoucí do bodu  $p_0$  vycházejí ze stejného bodu (všechny nuly a póly leží v bodě  $\sigma$ ). Pro velké  $p_0$  to přibližně platí (podle obrázku 7.13) a proto můžeme psát

$$1 + Kk \frac{(p - \sigma)^m}{(p - \sigma)^n} = 1 + \frac{Kk}{(p - \sigma)^{n-m}} = 0 \quad (7.27)$$

Roznásobením jmenovatele dostaneme

$$1 + \frac{Kk}{p^{n-m} - (n - m)\sigma p^{n-m-1} + \cdots} = 0 \quad (7.28)$$

Nyní můžeme srovnáním rovnic (7.26) a (7.28) a s uvažováním pouze prvních dvou členů získat rovnici

$$(n - m)\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i \quad (7.29)$$

Vyjádřením  $\sigma$  získáme rovnici (7.22) pro polohu průsečíku asymptot.

Na vypočítaný střed asymptot  $\sigma$  se můžeme dívat jako na těžiště.

### 7.2.7 Průsečík s reálnou osou

Existují dva typy průsečíků větví kořenového hodografu s reálnou osou. U prvního typu z reálné osy větve vycházejí (rozvětvení), u druhého do ní naopak vcházejí. První typ nastává v bodě mezi dvěma póly na reálné ose, mezi kterými není nula a od kterého napravo leží lichý počet nul a pólů. Druhý typ nastává v bodě mezi dvěma nulami na reálné ose nebo mezi nulou na reálné ose a nekonečnem. Opět musí platit že mezi nimi není žádný pól a že napravo od něj leží lichý počet nul a pólů.

Pro výpočet vzdálenosti průsečíku od počátku  $x$  předpokládejme, že jsme v bodě nad průsečíkem, v malé vzdálenosti od reálné osy  $\Delta$ . Pak podle rovnice 7.21 pro úhly dostaneme

$$-\sum_{i=1}^n \angle(p - \alpha_i) + \sum_{i=1}^m \angle(p - \beta_i) = 180^\circ + i360^\circ \quad \text{kde } p = x + j\Delta \quad (7.30)$$

Úhly můžeme nahradit funkcí arctg poměru imaginární a reálné složky jednotlivých vektorů. Protože  $\Delta$  je malé, platí přibližně  $\text{arctg}(\alpha) \doteq \alpha$ . Po vydělení  $\Delta$  dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \alpha_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x - \beta_i} = 0 \quad (7.31)$$

Tuto rovnici lze obvykle řešit pouze iterativně, t.j. zkusmým dosazením předpokládané hodnoty a pak postupnými opravami předpokladu. Například se dá použít metoda půlení intervalů.

**Příklad 7.8** Metodou kořenového hodografu dokažte, že systém s přenosem otevřeného obvodu

$$F_0(p) = \frac{K(p+4)}{p(p+10)(p+1)}$$

je stabilní pro jakékoliv kladné zesílení  $K$ .

Stupeň polynomu jmenovatele, tedy řád systému je  $n = 3$ . Kořenový hodograf bude obsahovat tři větve. Stupeň polynomu čitatele je  $m = 1$ . Relativní řád přenosu otevřené smyčky je tedy roven  $n - m = 2$ . Dvě větve kořenového hodografu půjdou ze dvou pólů do nekonečna. Všechny nuly a póly leží na reálné ose  $n_1 = -4$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$  a  $p_3 = -10$ . Jednotlivé kořeny nám rozdělí reálnou osu na úseky, z nichž ty které mají napravo lichý počet kořenů jsou větví kořenového hodografu. V našem případě se jedná o úseky  $(-1, 0)$  a  $(-10, -4)$ . Použitím vzorce (7.22) můžeme vypočítat střed asymptot

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i}{n - m} = \frac{0 - 1 - 10 + 4}{2} = -3.5$$

Dále můžeme pomocí rovnice 7.21 spočítat úhel asymptot

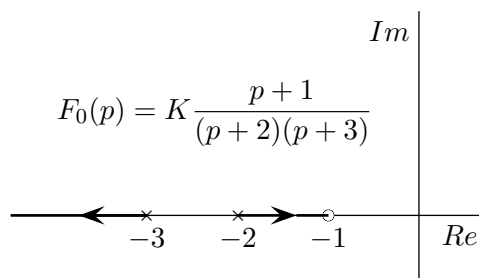
$$\varphi = \frac{180^\circ + i360^\circ}{n - m} = \frac{180^\circ + i360^\circ}{2}$$

Pro  $i = 0$  dostaneme  $\varphi_1 = 90^\circ$  a pro  $i = -1$  dostaneme  $\varphi_2 = -90^\circ$ . Pro další hodnoty parametru  $i$  bychom dostávali stejné úhly. Asymptotami jsou tedy polopřímky rovnoběžné s imaginární osou, začínající v bodě  $[-3.5; 0]$ . Dva póly, které se potkají na intervalu  $(-1; 0)$  se s rostoucím zesílením  $K$  odpojí od reálné osy a začnou se blížit dříve popsaným asymptotám. Protože žádná větev kořenového hodografu neprochází pravou polovinou komplexní roviny  $p$ , je zadaný přenos otevřené smyčky stabilní pro všechna kladná zesílení. Tím jsme splnili požadavek zadání. Větve kořenového hodografu můžeme vidět na obrázku 7.15.

**Příklad 7.9** *Nakreslete průběh větví kořenového hodografu systému s přenosem otevřené smyčky*

$$F_0(p) = \frac{K(p+1)}{(p+2)(p+3)}$$

*Povšimněte si tvaru přenosu uzavřené smyčky.*



**Obrázek 7.14:** Obrázek k příkladu 7.9

Není těžké ukázat, že obě větve kořenového hodografu leží na reálné ose. První leží na intervalu  $(-2; -1)$ , kde nám jeden pól odchází do nuly a druhá leží na intervalu  $(-\infty; -3)$ , kde nám druhý pól odchází do  $-\infty$ . Na základě těchto úvah a na základě znalostí vztahu mezi dominantními póly a rychlostí odezvy systému bychom mohli říci, že změnou zesílení nemůžeme zrychlit chování zpětnovazebního obvodu, protože zde bude dominantní pól blízký se do bodu  $-1$ . Pokud si ale napíšeme přenos řízení

$$F_w(p) = \frac{K(p+1)}{(p+2)(p+3) + K(p+1)}$$

tak zjistíme, že se v tomto přenosu vyskytuje také nula původního přenosu, která se s tímto dominantním pólem pro vysoké zesílení  $K$  zkrátí a výsledný přenos řízení se dá přibližně nahradit přenosem prvního řádu

$$F_w(p) \doteq \frac{K}{p+K}$$

V Matlabu si tuto skutečnost můžete ověřit pomocí příkazů

```
>> Fp = zpk([-1], [-2 -3], 1);
>> feedback(Fp*1000, 1, -1)
Zero/pole/gain:
    1000 (s+1)
-----
(s+1.002) (s+1004)
```

### 7.2.8 Použití programu Matlab

V programu Matlab existuje příkaz `rltool`, který otevře `sisotool` se zobrazením průběhu kořenového hodografu. Pomocí tohoto nástroje lze interaktivně přidávat nuly a póly do regulátoru a nastavovat zesílení regulátoru tak, aby dominantní póly uzavřeného obvodu ležely co nejvíce vlevo od imaginární osy a aby ležely ve výseči, která vyhovuje požadovanému tlumení.

**Příklad 7.10** Pomocí příkazu `rltool` vyřešte předchozí příklad

Nejprve nadefinujeme přenos otevřené smyčky v Matlabu

```
>> F0 = zpk([-4], [-1 -10 0], 1)
Zero/pole/gain:
    (s+4)
-----
s (s+1) (s+10)
```

Potom zavoláme příkaz

```
>> rltool(F0)
```

ten způsobí otevření okna, které je vidět na obrázku 7.15. Zde je přímo vidět, že žádná větev kořenového hodografu nezasahuje do pravé poloroviny komplexní roviny  $p$  a tudíž je daný přenos otevřené smyčky stabilní pro libovolné zesílení  $K$ .

### 7.2.9 Kontrolní otázky

**Otázka 7.6** Vysvětlete princip metody kořenového hodografu. K čemu se používá?

**Otázka 7.7** Jaká je podmínka toho, že bod na reálné ose je součástí větve kořenového hodografu?

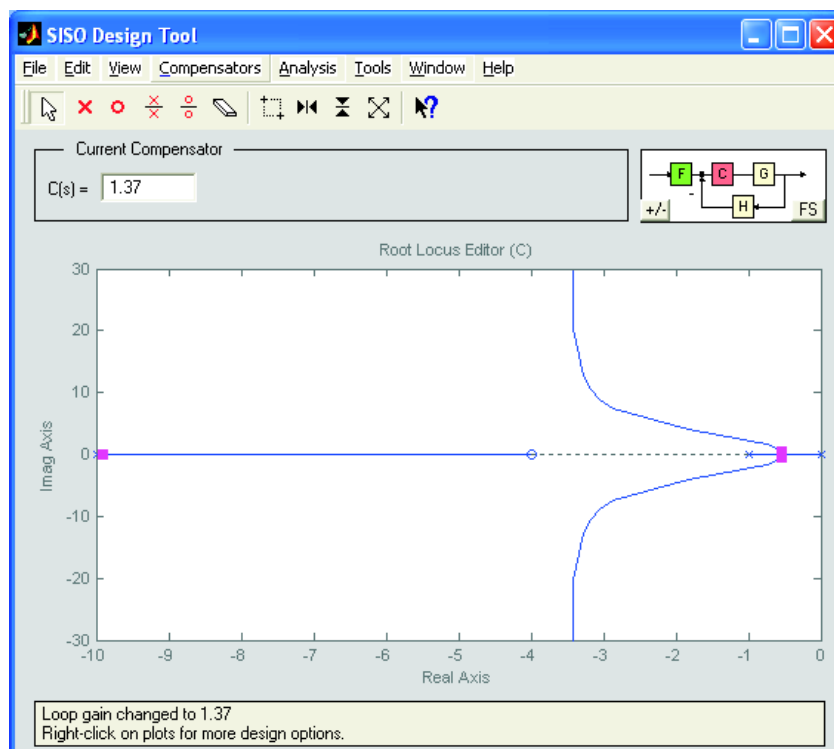
**Otázka 7.8** Na čem závisí počet větví kořenového hodografu.

**Otázka 7.9** Kde začínají a kde končí větve kořenového hodografu?

**Otázka 7.10** Podle které osy je kořenový hodograf symetrický a proč?

**Otázka 7.11** Napište vzorec pro výpočet středu asymptot.

**Otázka 7.12** Napište vzorec pro výpočet směru asymptot.



Obrázek 7.15: Okno po spuštění rltool-u

### 7.2.10 Neřešené příklady

**Úkol 7.1** Sestrojte kořenový hodograf, pokud je přenos otevřené smyčky roven

$$F_0(p) = \frac{k_0(p+1)}{p(p+2)(p^2+10p+26)}$$

**Úkol 7.2** Načrtněte kořenový hodograf diskrétního systému, jehož přenos otevřeného obvodu je

$$F_0(p) = \frac{k_0(z+2)}{(z-1)(z+0.5)}$$

Proveďte rozbor dynamických vlastností. Rozhodněte, zda je možné změnou zesílení  $k_0$  dosáhnout umístění všech pólů do počátku, což odpovídá konečnému počtu kroků impulsové charakteristiky uzavřeného obvodu.

## 7.3 Analýza pomocí frekvenčních charakteristik

Požadavky na tvar frekvenčních charakteristik uzavřeného obvodu pro řízení a poruchu lze shrnout do následujících bodů

- **Frekvenční charakteristika přenosu řízení  $F_w(j\omega)$  by měla mít amplitudu rovnou jedné až do co nejvyšších frekvencí a navíc by měla být bez rezonančních překmitů.** Požadavek na to jít do co nejvyšších frekvencí je analogické požadavku na co nejvyšší rychlost odezvy uzavřeného obvodu na změnu řídicí

veličiny. Rezonanční překmit souvisí s kmitavostí uzavřeného obvodu (vzpomeňte si na frekvenční charakteristiky systému druhého řádu pro různé hodnoty tlumení).

- **Amplituda frekvenční charakteristiky přenosu poruchy  $F_u(j\omega)$  by měla být co nejmenší v celém rozsahu frekvencí.** To odpovídá požadavku na potlačení poruchy na všech frekvencích.

Analýza dynamických vlastností obvodu se většinou neprovádí z frekvenční charakteristiky uzavřeného obvodu, neboť často není k dispozici. Proto pracujeme s frekvenční charakteristikou otevřeného obvodu  $F_0(j\omega)$ , jako při rozboru stability.

Platí zde stejné výhody a nevýhody, jako při zjišťování stability pomocí Nyquistova kritéria. Výhodou je to, že nemusíme znát analytický popis regulované soustavy, protože nám postačí experimentálně zjištěná data. Nevýhodou je grafický způsob řešení, který je pracný a obtížně algoritmizovatelný. Další nevýhodou je fakt, že požadavky na dynamické chování regulačního obvodu jsou většinou zadány v časové oblasti, takže je nutné je nejprve převést na požadavky na tvar frekvenčních charakteristik.

Při řešení stability uzavřené smyčky pomocí Nyquistova kritéria pro nás byl důležitý bod -1, který pro nás představoval mez stability. V této části se dostáváme poněkud dále. Nebude nás zajímat pouze rozlišení, zda je uzavřená smyčka stabilní či nikoliv, ale navíc se budeme zabývat tím, jak daleko jsme od nestability. Jinými slovy jak daleko je frekvenční charakteristika otevřeného obvodu od bodu -1. Pro posouzení se používají pojmy zásoba stability v amplitudě, zásoba stability ve fázi a zásoba stability v modulu. Význam těchto pojmů si vysvětlíme v následujících podkapitolách.

### 7.3.1 Zásoba stability v amplitudě

Zásoba stability v amplitudě je taková hodnota zesílení, se kterou když vynásobíme stávající zesílení otevřené smyčky, tak přivede uzavřenou smyčku na mez stability. Bývá označována také jako amplitudová bezpečnost. Udává se ve formě násobícího faktoru nebo v decibelech. Na obrázku 7.16 je ukázáno, že amplitudová bezpečnost je převrácenou hodnotou vzdálenosti průsečíku frekvenční charakteristiky otevřené smyčky se zápornou částí reálné osy od počátku.

### 7.3.2 Zásoba stability ve fázi

Zásoba stability ve fázi je záporně vzatá změna fáze otevřeného obvodu, která přivede uzavřený obvod na mez stability. Bývá označována také jako fázová bezpečnost. Na obrázku 7.16 je vyznačena fázová bezpečnost, jako úhel mezi zápornou reálnou osou a přímkou procházející počátkem a průsečíkem frekvenční charakteristiky otevřené smyčky s kružnicí se středem v počátku a amplitudou 1. Frekvence, při které dojde k tomuto průsečíku se nazývá kmitočet řezu  $\omega_{\check{r}}$ .

### 7.3.3 Zásoba stability v modulu

Zásoba stability v modulu je definována jako nejkratší vzdálenost frekvenční charakteristiky otevřené smyčky od bodu -1 v komplexní rovině. Geometricky to odpovídá poloměru

kružnice se středem v bodě -1, která se dotýká frekvenční charakteristiky otevřené smyčky, ale neprotíná ji. Zásoba stability v modulu je znázorněna na obrázku 7.16. Je silnějším kritériem, než amplitudová a fázová bezpečnost. Pokud je totiž dána zásoba stability v modulu, pak nám zároveň určuje jistou hodnotu amplitudové a fázové bezpečnosti. Opak samozřejmě neplatí. Například zvolené  $M_M = 0.5$  automaticky znamená  $M_G = 2$  a  $M_P = 29^\circ$ . Podíváme-li se do Tabulky 7.1, vidíme, že jsou to mezní hodnoty zásob stability, které se v praxi používají.

Pro bližší vysvětlení se podívejme na obrázek 7.17. Zde jsou ukázány tři průběhy frekvenční charakteristiky otevřené smyčky a zvolené hranice zásob stability, které vyhovují podmínkám pro jejich typické nastavování (tabulka 7.1). Ikdýž  $F_{0_2}$  splňuje požadavek na zásobu stability ve fázi, je zásoba stability v amplitudě velmi malá a proto nevyhovující. Naproti tomu  $F_{0_3}$  splňuje požadavek na zásobu stability v amplitudě, ale zásoba stability ve fázi je nevyhovující. Všimněte si, že oba tyto průběhy nevyhovují zásobě stability v modulu. Všem požadavkům na zásoby stability vyhovuje pouze průběh  $F_{0_1}$ .

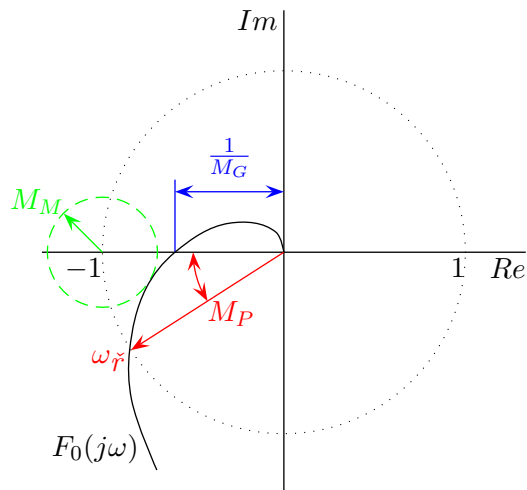
### 7.3.4 Zásoba stability ve zpoždění

Tento parametr je v těsné souvislosti s fázovou bezpečností. Jak víme z předchozího kurzu, dopravní zpoždění  $T_d$  nezpůsobuje změnu amplitudy, ale pouze změnu fáze  $\phi$ , která je přímo úměrná frekvenci  $\omega$ .

$$\phi = T_d \omega$$

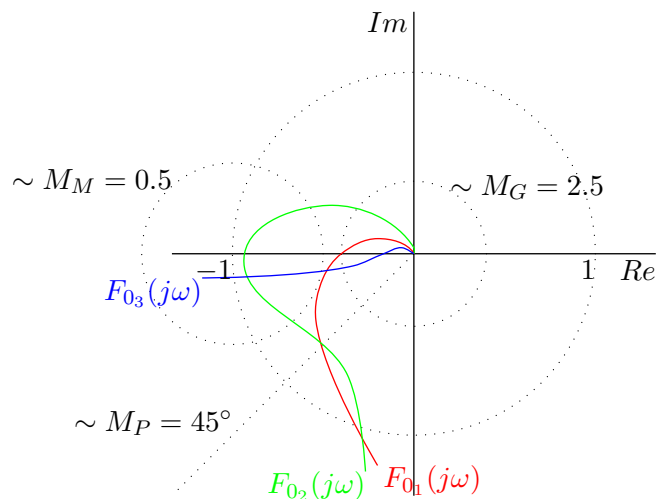
Můžeme proto převést fázovou bezpečnost  $M_P$  na zásobu stability ve zpoždění  $M_D$  pomocí vzorce

$$M_D = \frac{M_P}{\omega_{\check{r}}}$$



Obrázek 7.16: Vysvětlení pojmů

Typické hodnoty výše popsaných parametrů jsou shrnuty v tabulce 7.1.



Obrázek 7.17: Zajímavé příklady

Typ parametru	Typické nastavení	Minimální hodnota
Zásoba stability v amplitudě	$M_G \geq 2(6dB)$	$M_G = 1.6(4dB)$
Zásoba stability ve fázi	$30^\circ \leq M_P \leq 60^\circ$	
Zásoba stability v modulu	$M_M \geq 0.5(-6dB)$	$M_G = 0.4(-8dB)$

Tabulka 7.1: Doporučené hodnoty parametrů pro zásobu stability

### 7.3.5 Zjišťování amplitudové a fázové bezpečnosti v Matlabu

V programu Matlab existují dva příkazy, které se dají použít pro zjištění amplitudové a fázové bezpečnosti. Jedná se o příkazy `margin` a `allmargin`.

Vstupním parametrem je přenos otevřené smyčky. U příkazu `margin` mohou být zadány vstupní parametry tři, které pak vyjadřují vektor modulů, vektor fází a vektor frekvencí. Mezi jednotlivými hodnotami se provádí interpolace. Pokud není u příkazu `margin` použit výstupní parametr, příkaz vykreslí frekvenční charakteristiku přenosu otevřené smyčky v logaritmických souřadnicích s vyznačením amplitudové a fázové bezpečnosti. Jinak oba příkazy vrací hodnoty amplitudové a fázové bezpečnosti s odpovídajícími frekvencemi.

**Příklad 7.11** Pomocí programu Matlab zjistěte amplitudovou a fázovou bezpečnost přenosu

$$F(p) = \frac{5}{(p+1)^3}$$

Nejprve musíme zadat požadovaný přenos. Protože je přenos zadán ve tvaru, ze kterého vidíme rozložení nul a pólů, použijeme příkaz

```
>> F = zpk([], [-1 -1 -1], 5)
```

Zero/pole/gain:

5

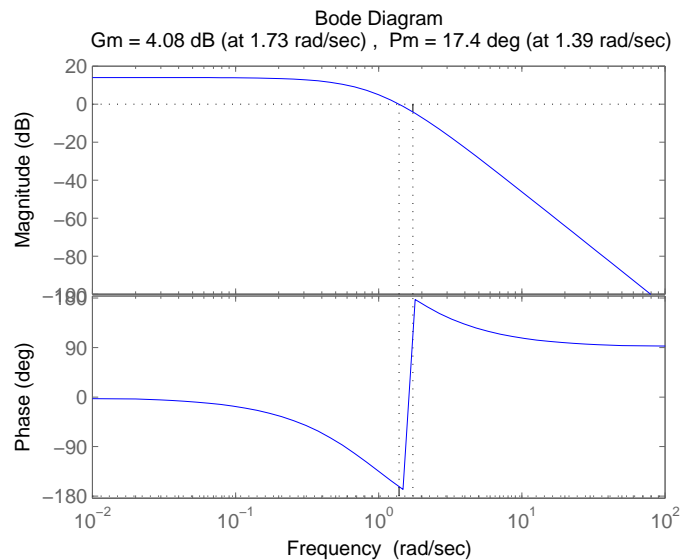


-----  
 $(s+1)^3$

Nyní můžeme jednoduše použít příkaz

```
>> margin(F)
```

Ten způsobí vykreslení grafu, který je na obrázku 7.18. Amplitudová bezpečnost je  $M_{G_{dB}} =$



Obrázek 7.18: Výsledek příkazu margin

4.08dB a fázová bezpečnost je  $M_P = 17.4^\circ$ . Amplitudovou bezpečnost většinou požadujeme získat ve formě násobícího faktoru. Převod je snadný a známý z předchozího kurzu. Pro zopakování

$$M_{G_{dB}} = 20 \log(M_G) \quad \Rightarrow \quad M_G = 10^{M_{G_{dB}}/20} = 10^{4.08/20} = 1.6$$

Pokud zadáme výstupní parametry, pak se průběh nevykreslí

```
>> [Mg,Mp,Wcg,Wcp]=margin(F)
Mg =
    1.6002
Mp =
    17.3704
Wcg =
    1.7322
Wcp =
    1.3870
```

Obdrželi jsme po řadě amplitudovou a fázovou bezpečnost a jim odpovídající frekvence.

Příkaz `allmargin` vrací strukturu, která obsahuje zásoby stability a jim odpovídající frekvence.

```
>> allmargin(F)
ans =
    GMFrequency: 1.7322
    GainMargin: 1.6002
    PMFrequency: 1.3870
    PhaseMargin: 17.3704
    DMFrequency: 1.3870
    DelayMargin: 0.2186
    Stable: 1
```

Pomocí tohoto příkazu jsme získali navíc zásobu stability ve zpoždění. Pro bližší vysvětlení použitých příkazů můžete nahlédnout do jejich help-ů.

**Příklad 7.12** *Určete zásobu stability v modulu, pokud znáte přenos otevřené smyčky*

$$F_0(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^3 + 2.5p^2 + 2p}$$

Přenos zadáme pomocí příkazu

```
>> F0=tf(1,[1 2 2.5 2 0]);
```

Mohli bychom si nakreslit průběh frekvenční charakteristiky v komplexní rovině pomocí příkazu

```
>> nyquist(F0);
```

a zde se pokusit najít poloměr kružnice, která by se dotýkala frekvenční charakteristiky. Existuje ovšem jednodušší řešení. Místo toho abychom řešili minimální vzdálenost frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$  od bodu  $-1$ , můžeme řešit minimální vzdálenost frekvenční charakteristiky  $1 + F_0(j\omega)$  od bodu  $0$ , což je vlastně minimum modulu (amplitudové frekvenční charakteristiky)  $\min(|1 + F_0(j\omega)|)$ . Řešení obdržíme po zavolání příkazu

```
>> MM = min(bode((1+F0)))
MM =
    0.3273
```

V případě odečítání minima z průběhu získaném příkazem `bode` nesmíme zapomenout přepočítat decibely  $-9.715dB$  na absolutní hodnotu.

### 7.3.6 Zjištění frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky z průběhu $F_0(j\omega)$

Pro zhodnocení dynamických vlastností uzavřeného obvodu potřebujeme znát frekvenční charakteristiku  $F_w(j\omega)$ . K dispozici je však většinou jen frekvenční charakteristika otevřené smyčky  $F_0(j\omega)$ . V této podkapitole si vysvětlíme grafickou metodu, která se dá použít pro získání frekvenční charakteristiky  $F_w(j\omega)$  ze známé  $F_0(j\omega)$ . Jedná se již o zastaralý způsob, který je překonaný použitím výpočetní techniky. Pro nás je však zajímavý z hlediska chápání souvislostí.

Rozebereme frekvenční charakteristiku  $F_w(j\omega)$  pro mezní hodnoty  $F_0(j\omega)$ .

$$F_w(j\omega) = \frac{F_0(j\omega)}{1 + F_0(j\omega)} \quad (7.32)$$

$$|F_0(j\omega)| \gg 1$$

Pro  $|F_0(j\omega)| \gg 1$  platí přibližně  $F_w(j\omega) \doteq 1$ . Tato situace nastává většinou pro oblast nízkých frekvencí, menších než převrácené hodnoty časových konstant regulované soustavy.

$$|F_0(j\omega)| \ll 1$$

Pro  $|F_0(j\omega)| \ll 1$  platí přibližně  $F_w(j\omega) \doteq F_0(j\omega)$ . To znamená, že se frekvenční přenos uzavřené smyčky ztotožní s přenosem otevřené smyčky. Protože polynom ve jmenovateli soustavy je prakticky vždy vyššího řádu než polynom v čitateli, nastane přibližná rovnost obou přenosů vždy pro vysoké frekvence, tj. vyšší než převrácené hodnoty časových konstant soustavy.

$$|F_0(j\omega)| \doteq 1$$

Zbývá nám určit chování  $F_w(j\omega)$  v oblasti středních kmitočtů, jmenovitě v okolí  $\omega_{\check{r}}$ . Tato oblast určuje dynamické chování uzavřeného obvodu a je tedy pro nás nejzajímavější a proto se na ni zaměříme podrobněji. Zavedeme pojmy M-kružnice a N-kružnice. M-kružnice je tvořena geometrickými místy  $x$  v komplexní rovině, kde jsou amplitudy komplexního čísla  $\frac{x}{1+x}$  konstantní a rovny číslu M. Uvažujme  $F_0(j\omega) = u + jv$ . Potom

$$|F_w(j\omega)| = \frac{|F_0(j\omega)|}{|1 + F_0(j\omega)|} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{(1+u)^2 + v^2}}$$

neboli

$$u^2 + v^2 = [(1+u)^2 + v^2]M^2$$

Tento výraz můžeme upravit do tvaru

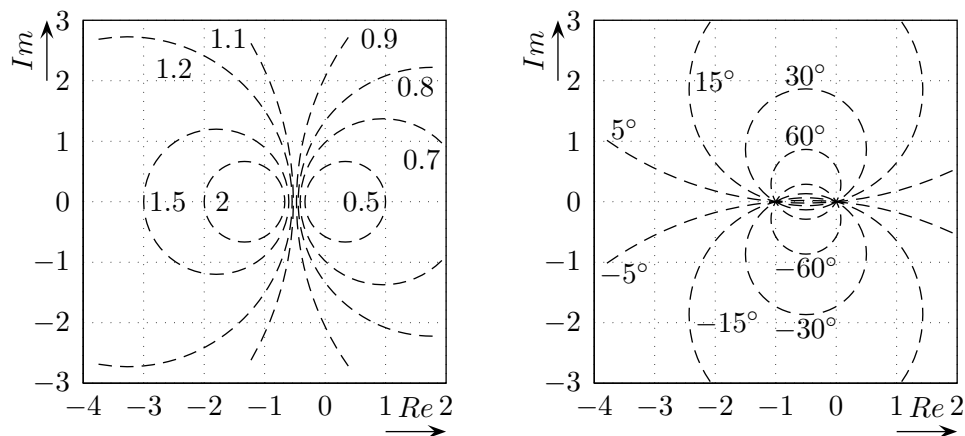
$$\left(u - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2 \quad (7.33)$$

Tato rovnice popisuje kružnici se středem v bodě  $(\frac{M^2}{1-M^2}, 0)$  a o poloměru  $|\frac{M}{1-M^2}|$ . Proto název M-kružnice. Pro případ  $M = 1$  se kružnice změní v přímku kolmou k reálné ose a procházející bodem  $(-0.5, 0)$ .

N-kružnice je množina bodů  $x$  v komplexní rovině, ve kterých je fáze  $\frac{x}{1+x}$  konstantní a rovna  $N$ .

$$\begin{aligned} N = \arg F_w(j\omega) &= \arg \frac{F_0(j\omega)}{1 + F_0(j\omega)} = \arg F_0(j\omega) - \arg(1 + F_0(j\omega)) = \\ &= \arctan \frac{v}{u} - \arctan \frac{v}{1+u} = \phi_1 - \phi_2 \quad (7.34) \end{aligned}$$

N-kružnice má poloměr  $\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 N}}$  a střed v bodě  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\tan N})$ . Všechny N-kružnice procházejí body  $(0, 0)$  a  $(-1, 0)$ . Tyto body vytvářejí tětivu k N-kružnicím. Vrcholové úhly nad tětivou kružnice jsou konstantní. Proto se opět jedná o kružnice. Některé M a N-kružnice jsou zobrazeny na obrázku 7.19.



**Obrázek 7.19:** M-kružnice a N-kružnice

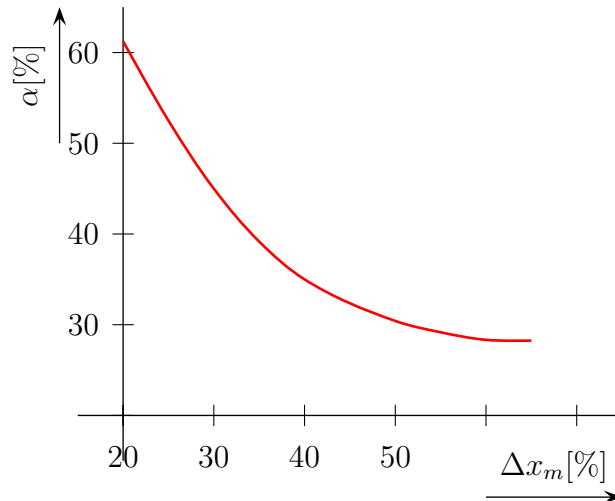
Amplituda frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky  $F_w(j\omega)$  se zjistí jako průsečík frekvenční charakteristiky otevřené smyčky  $F_0(j\omega)$  s M-kružnicí. Podobně fáze  $F_w(j\omega)$  vychází z průsečíku  $F_0(j\omega)$  s N-kružnicí. Přímou můžeme určit další parametry

- výška rezonančního převýšení je určena kružnicí s maximální hodnotou  $M$ , kterou  $F_0(j\omega)$  prochází
- rezonanční frekvence  $\omega_r$  je frekvence ve které dochází k tomuto maximu
- šířka pásma je frekvence ve které  $F_0(j\omega)$  prochází M-kružnicí s poloměrem  $M=0.707$ .

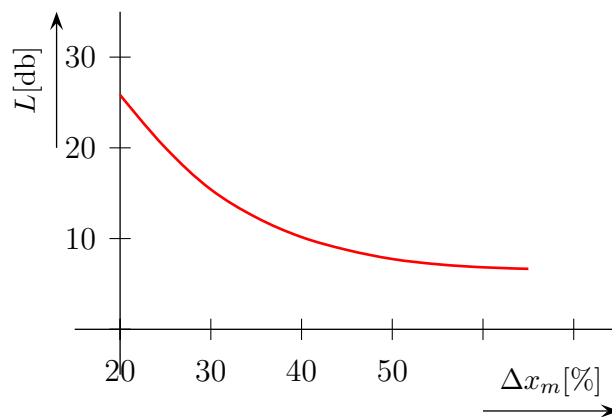
Mezi fázovou bezpečností  $M_P$  a překmitem přechodové charakteristiky uzavřeného obvodu při změně řízení je těsný vztah. Nelze jej vyjádřit přesně analyticky, platí tedy pouze přibližně. Byl získán experimentálně. Graficky je znázorněn na obrázku 7.20. Protože u fázově minimálního systému platí jednoznačný vztah mezi amplitudovou a fázovou charakteristikou, není překvapující, že má tento graf obdobu i pro amplitudovou bezpečnost. Z důvodu návaznosti na syntézu regulátoru se udává v logaritmických souřadnicích. Protože amplitudová a fázová bezpečnost nejsou uváděny pro jednu frekvenci, nebude vztah mezi obrázky jednoznačný. Bude platný pouze za předpokladu, že sklon frekvenční charakteristiky bude v dostatečně velkém okolí frekvence  $\omega_{\check{r}}$  roven  $-20\text{dB/dek}$ , kterému odpovídá fázový posun  $-90^\circ$ . Nyní trochu přeskočíme do oblasti syntézy regulačního obvodu, která bude naplnit některé z dalších kapitol. Při návrhu regulátoru metodou standardních tvarů frekvenční charakteristiky se snažíme o vytvoření úseku na frekvenční charakteristice se sklonem  $-20\text{dB/dek}$  tak, aby  $\omega_{\check{r}}$  leželo uprostřed tohoto úseku a zároveň aby byl  $\omega_{\check{r}}$  co největší.

### 7.3.7 Kontrolní otázky

**Otázka 7.13** *Vysvětlete pojmy: amplitudová bezpečnost, fázová bezpečnost, zásoba stability v modulu a zásoba stability ve zpoždění.*



**Obrázek 7.20:** Vztah mezi fázovou bezpečností a velikostí překmitu



**Obrázek 7.21:** Vztah mezi délkou úseku se sklonem 20dB/dek kolem  $\omega_{\tilde{\gamma}}$  a velikostí překmitu

**Otázka 7.14** *Jaká jsou obvyklé hodnoty jednotlivých zásob stability?*

**Otázka 7.15** *Vysvětlete, proč je pojem zásoby stability v modulu silnějším kritériem než zásoba stability v amplitudě nebo ve fázi. Demonstrujte na příkladě.*

**Otázka 7.16** *Spočítejte minimální zásobu stability v amplitudě a ve fázi, pokud víte, že je zásoba stability v modulu rovna  $M_M = 0.4$ .*

## 7.4 Shrnutí

V této kapitole jsme si probrali různé metody, které se používají pro analýzu dynamických vlastností zpětnovazebních regulačních obvodů. Dozvěděli jsme se, že základní rozdělení je na metody v časové oblasti, ve frekvenční oblasti a na metodu kořenového hodografu, která sleduje polohu pólů uzavřeného regulačního obvodu v komplexní rovině.

V časové oblasti lze použít integrální kritéria. Jejich nevýhodou je ovšem pracnost výpočtu (kvadratické integrální kritérium), respektive nemožnost získání analytického řešení (usměrněná regulační plocha, ITAE). Bohužel ty, které jdou analyticky spočítat dávají málo tlumené odezvy (kvadratické integrální kritérium). Toto jsou důvody, proč se tyto kritéria většinou nepoužívají k syntéze regulačních obvodů.

Kritéria ve frekvenční oblasti jsou výhodná, protože většinou pracují s frekvenční charakteristikou otevřené smyčky, která je často k dispozici. Na základě průběhu  $F_0(j\omega)$  usuzují jakým způsobem se bude chovat přenos uzavřené smyčky. Vychází z Nyquistova kritéria stability. Sledují, jaká je vzdálenost frekvenční charakteristiky otevřené smyčky od bodu  $-1$ .

Frekvenční charakteristika uzavřeného obvodu by měla mít modul roven jedné do co nejvyšších kmitočtů, čímž se zajistí nulová ustálená odchylka při skokové změně řízení a co nejrychlejší přechodný děj. Je zde dovolené mírné rezonanční převýšení, které souvisí s povoleným překmitem v časové oblasti.

Metoda kořenového hodografu je soubor pravidel, které nám umožňují sledovat vývoj polohy pólů uzavřeného obvodu v závislosti na změně zesílení přenosu otevřené smyčky a na znalosti polohy nul a pólů otevřené smyčky. Přestože se jedná o metodu, která má v současné době silnou podporu ze strany výpočetní techniky (např. `rltool` v programu Matlab), je pochopení těchto pravidel nezbytnou součástí práce s těmito nástroji. Tato metoda, stejně tak jako metody ve frekvenční oblasti se dají použít a také s výhodou používají při syntéze zpětnovazebních regulačních obvodů.

## 7.5 Kontrolní otázky

**Otázka 7.17** *Jaké znáte metody pro vyhodnocování dynamických vlastností zpětnovazebních obvodů?*

**Otázka 7.18** *Dokážete vyznačit na frekvenční charakteristice zvoleného přenosu amplitudovou a fázovou bezpečnost a zásobu stability v modulu?*

## 8 Sytéma regulačních obvodů ve frekvenční oblasti

Syntézou regulačního obvodu rozumíme takový návrh struktury a parametrů obvodu, který splňuje požadavky kladené na regulační děj. Výhodiskem jsou tedy požadavky na kvalitu regulace a vlastnosti regulované soustavy. Při volbě dalších členů obvodu, t.j. čidel, akčních členů, výkonových zesilovačů a ústředních členů jsme více či méně omezeni řadou činitelů. Mohou to být speciální požadavky vyplývající z technologie provozu (váha, jiskrová bezpečnost, agresivita prostředí, ...), ekonomické důvody i okamžitá situace na trhu součástek a zařízení. Podle stupně volnosti, s jakou může konstruktér regulačního obvodu pracovat, můžeme rozlišit zhruba tři typy úloh:

- můžeme volit jak strukturu tak parametry obvodu
- struktura obvodu je dána, navrhujeme pouze parametry obvodu
- je zadána struktura a některé parametry, část parametrů je volitelná

Většina obvodů v průmyslové automatizaci má strukturu odpovídající blokovému schématu na obrázku 1.2. Jedná-li se o obvody s vysokými požadavky na kvalitu regulace, může být tato základní struktura doplněna některými dalšími vazbami (viz. kapitola 9). Určité rozšíření možností představuje zařazení korekčního členu do větve zpětné vazby (obrázek 4.1). Stejně struktury jako v případě spojitých regulátorů se dají použít v případě diskretních regulátorů. Jejich návrh je náplní kapitoly 10.

Návrh regulačního obvodu začíná obvykle dialogem s technologem příslušného odvětví, během kterého se definují regulované, akční a řídicí veličiny a poruchy, vlastnosti regulované soustavy a požadavky na kvalitu regulace. V dalším kroku automatizační technik určí typy a umístění čidel a typy akčních členů. Přitom musí obvykle respektovat řadu omezení a technologických požadavků. Výraznou roli hrají též bezpečnostní předpisy daného oboru. Po vyjasnění těchto problémů se může přistoupit k návrhu jednotlivých přenosů regulátorů a posléze k jejich realizaci.

V průběhu uplynulých let bylo vypracováno velké množství metod pro návrh struktury i parametrů regulačních obvodů. Dosud nebyla nalezena univerzální metoda, která by umožňovala splnění široké palety požadavků při různých výchozích informacích o regulované soustavě i požadovaných vlastnostech regulace. Proto, i když praxe řadu navržených metod zavrhl (nebo se v širší míře neuplatnily), zbývá několik metod, které je nutno znát k řešení různých typů úloh. Uvedeme je zde v pořadí odpovídajícím zhruba šíři jejich uplatnění.

### 8.1 Metoda standardního tvaru frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu

Jak již vyplývá z názvu, návrh regulátoru touto metodou se provádí tvarováním frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu, abychom dosáhli jejího vhodného tvaru. Souvislost mezi tvarem  $F_0(j\omega)$  a časovou odezvou jsme rozebrali v kapitole 7.3.

Nejprve předpokládejme, že známe požadovaný tvar  $F_0(j\omega)$ . Potom platí

$$F_0(j\omega) = F_R(j\omega)F_S(j\omega) = |F_R(j\omega)F_S(j\omega)|e^{j(\varphi_R+\varphi_S)}$$

Amplitudová charakteristika regulátoru v dB je pak určena rovnicí

$$|F_R(j\omega)|_{dB} = |F_0(j\omega)|_{dB} - |F_S(j\omega)|_{dB}$$

a fáze vztahem

$$\varphi_R(\omega) = \varphi_0(\omega) - \varphi_S(\omega)$$

Jak je vidět z těchto vztahů, dá se frekvenční charakteristika regulátoru určit odečtením frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu od požadovaného tvaru frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu. To platí v případě, že jsou frekvenční charakteristiky vyjádřeny v decibelech. Proto se návrh touto metodou provádí v logaritmických souřadnicích. To přináší další výhodu v tom, že se jednotlivé charakteristiky dají nahradit asymptotickými přímkovými úseky, jejichž součet je snadno proveditelný i ručně graficky, bez nutnosti použití výpočetní techniky.

Nyní se pokusíme odpovědět na otázku, jak vypadá požadovaný tvar  $F_0(j\omega)$ . Poznali jsme již, že průběh  $F_0(j\omega)$  v oblasti nízkých kmitočtů určuje ustálené odchylky v systému. Tato část se proto navrhuje s ohledem na požadavky na ustálený stav v systému. Většinou se tedy jedná o počet astatických, které vložíme do regulátoru s přihlédnutím na možné astatické v soustavě. Oblast vysokých kmitočtů, ve kterých  $|F_0(j\omega)| \ll 1$ , je z hlediska regulačního děje nepodstatná. Charakter přechodného děje určuje střední pásmo kmitočtů, jmenovitě oblast, ve které  $|F_0(j\omega)| \doteq 1$ . Zde jsou obecně formulovány dva požadavky

- co nejvyšší hodnota kmitočtu řezu  $\omega_{\check{r}}$ , která je určující pro rychlost přechodného děje
- co největší fázová bezpečnost, která zajistí malý překmit na přechodové charakteristice.

Jak již bylo popsáno v kapitole 7.3 o analýze dynamických vlastností ve frekvenčních charakteristikách, dá se požadavek na fázovou bezpečnost vyjádřit také tak, že amplitudová část frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$  má procházet přes osu 0dB pod sklonem  $-20dB/dek$  a tento sklon je třeba dodržet v co největším okolí bodu  $\omega_{\check{r}}$ .

Existuje několik zásad, jak správně navrhnout regulátor, které jsou platné pro určité typy regulovaných soustav. Obecně platný postup však bohužel neexistuje. Hlavní zásadou je, aby byl navržený regulátor realizovatelný, jinými slovy aby řád čitatele regulátoru byl nižší nebo roven řádu jmenovatele. Pokud budeme při návrhu uvažovat regulátory typu PID, musíme vzít v úvahu realizační konstantu PD a PID regulátorů. Její volba se většinou provádí tak, aby poměr časové konstanty čitatele  $T$  a realizační konstanty  $\varepsilon$  vyhovoval rovnici  $T/\varepsilon < 100$ . Zařazení integrační složky zmenšuje, nebo dokonce anuluje ustálenou regulační odchylku. Její nevýhodou je zpomalení přechodného děje. Opačný vliv má přidání derivační složky, která přechodný děj zrychluje. Její použití musíme zvážit s ohledem na šum, který je přítomný ve výstupním signálu. Ten může být derivační složkou zesílen a působit tak nepříznivě na soustavu. Další zásady si probereme postupně pomocí vyřešených příkladů.

**Příklad 8.1** *Mějme astatickou regulovanou soustavu s přenosem*

$$F_S(p) = \frac{0.1}{p(3p + 1)(0.8p + 1)}$$



*K této soustavě postupně připojíme regulátory typu P a PD. Navrhněte tyto regulátory metodou standardních tvarů tak, aby byla fázová bezpečnost  $45^\circ$ .*

Předpokládáme P regulátor daný  $F_{R1}(p) = K_{R1}$ . Potom je přenos otevřené smyčky

$$F_{01}(p) = K_{R1}F_S(p) = K_{R1} \frac{0.1}{p(3p+1)(0.8p+1)}$$

Zatím neznáme velikost zesílení  $K_{R1}$ . Uvažujme pro začátek, že je  $K_{R1} = 1$ . Vykreslíme si v logaritmických souřadnicích průběh  $|F_{01}(j\omega)|_{dB}$  pro toto zesílení, což je vlastně  $|F_S(j\omega)|_{dB}$  (viz. obrázek 8.1 modře, tečkovaně). Pro fázi  $\angle F_{01}(p)$  platí

$$\varphi_{01}(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 3\omega - \arctan 0.8\omega$$

Fázová charakteristika  $\varphi_{01}(j\omega)$  nezávisí na velikosti proporcionální složky  $K_{R1}$ . Zakreslíme ji také do logaritmických charakteristik. Fázové bezpečnosti  $M_P = 45^\circ$  odpovídá frekvence  $\omega \doteq 0.23rad/s$ , která musí být kmitočtem řezu. V logaritmických souřadnicích to znamená posunout amplitudovou frekvenční charakteristiku  $|F_0(j\omega)|_{dB}(K_{R1} = 1)$  ve svislém směru tak, aby při frekvenci  $\omega = 0.23rad/s$  procházela úrovní  $0dB$ . Průběh musíme posunout o  $K_{R1dB} = 8dB$ , z čehož přímo plyne zesílení P regulátoru  $K_{R1} = 2.5$ .

Ke stejné soustavě navrhne regulátor typu PD s přenosem

$$F_{R2}(p) = \frac{K_{R2}(T_d p + 1)}{\varepsilon p + 1}$$

Volba konstant  $T_d$  a  $K_{R2}$  je dána výše uvedenými požadavky na přechodný děj, konstantu  $\varepsilon$ , která zajišťuje fyzikální realizovatelnost regulátoru budeme volit tak, aby neovlivnila průběh frekvenční charakteristiky otevřené smyčky  $F_{02}(j\omega)$  na středních kmitočtech. Nejprve určíme vhodnou derivační časovou konstantu  $T_d$ . Pokud bychom zvolili  $T_d > 3$ , vytvořili bychom na amplitudové charakteristice  $|F_{02}(j\omega)|$  úsek s nulovým sklonem amplitudy, což není vhodné. Zvolíme-li naopak  $T_d < 3$ , vznikne již v okolí frekvence  $\omega = 1/3rad/s$  úsek se sklonem  $-40dB/dek$ , což také není žádoucí. Jako nejvýhodnější se jeví volba  $T_d = 3$ , ikdyž se tím z hlediska stavové teorie vytvoří stavově neřiditelný systém. Potom stačí zvolit  $\varepsilon \leq 0.05$  (poměr  $T_d/\varepsilon$  nemá být větší než 100). Přenos otevřeného obvodu je

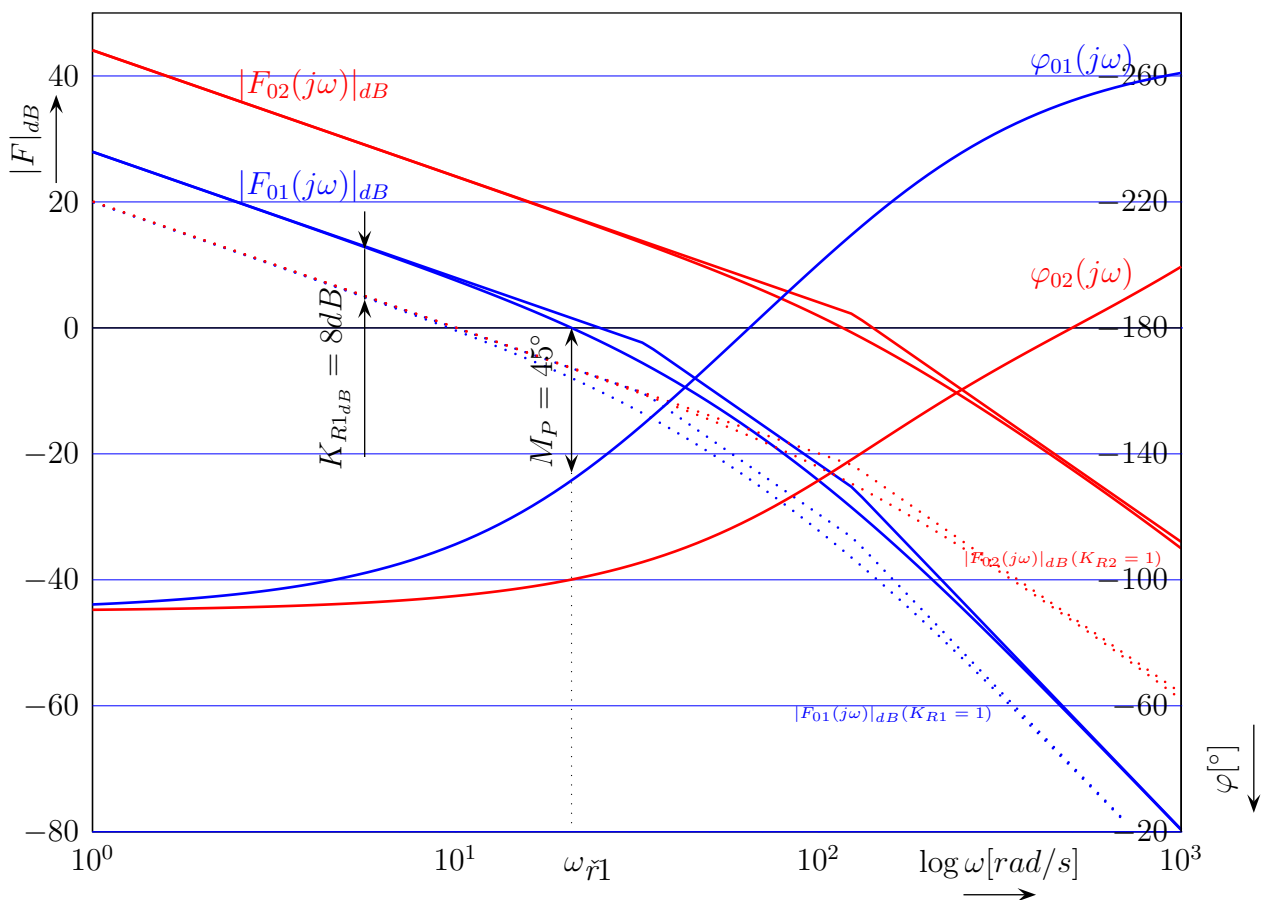
$$F_{02}(p) = \frac{K_{R2} \cdot 0.1}{p(0.8p+1)(0.05p+1)}$$

Pro fázovou charakteristiku  $F_{02}(p)$  platí

$$\varphi_{02}(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.8\omega - \arctan 0.05\omega$$

Její průběh opět vykreslíme v logaritmických souřadnicích a určíme  $\omega_{\check{r}2}$ , při které je  $\varphi_{02}(\omega_{\check{r}2}) = -135^\circ$ . Z obrázku 8.1 odečteme  $\omega_{\check{r}2} = 1.1rad/s$ , a odpovídající zesílení  $K_{R2dB} = 24dB$ , neboli  $K_{R2} = 16$ . Přenos regulátoru PD tak získáváme ve výsledném tvaru

$$F_{R2}(p) = 16 \frac{3p+1}{0.05p+1}$$



Obrázek 8.1: Návrh P a PD regulátoru pro astatickou soustavu k příkladu 8.1

Při stejné fázové bezpečnosti jsme při použití regulátoru typu PD získali zhruba čtyřnásobné  $\omega_{\dot{r}}$ , což přibližně znamená čtyřnásobné zrychlení přechodného děje.

V tomto příkladu jsme si ověřili vliv derivační složky v regulátoru na zrychlení přechodného děje při stejné fázové bezpečnosti, tedy při zhruba stejném překmitu (tlumení). To co jsme si ukázali na příkladu astatické soustavy řízené regulátory P a PD, platí stejně pro statickou soustavu řízenou regulátory I a PI. Z hlediska otevřeného obvodu je totiž lhostejné, zda je astatismus v soustavě nebo v regulátoru. Lhostejné to ale není z pohledu působení poruchy. K tomu abychom odstranili působení konstantní poruchy na vstupu soustavy je zapotřebí, aby byla integrační složka v regulátoru. Odstranění takovéto poruchy demonstruje následující příklad.

**Příklad 8.2** *Navrhněte regulátor pro soustavu z předešlého příkladu, který bude schopen kompenzovat působení konstantní poruchy působící na vstupu soustavy (požadavek na nulovou ustálenou odchylku při konstantní poruše)*

Z diskuze v kapitole 5.3.3 je zřejmé, že do regulátoru musíme zařadit integrační složku I. Teoreticky připadají v úvahu tři typy regulátorů, a to I, PI a PID. Prostý I regulátor je nepoužitelný, neboť systém by byl pro všechna zesílení nestabilní. Provedeme zde postupně návrh zbylých dvou regulátorů s integrační složkou. Nejprve tedy PI regulátor s přenosem

$$F_{R3}(p) = \frac{K_0(Tp + 1)}{p}$$

Přenos otevřené smyčky bude

$$F_{03}(p) = \frac{K_0(Tp + 1)}{p^2(3p + 1)(0.8p + 1)}$$

Pro zajištění stability je třeba, aby  $T > 3$ . Pro nalezení vhodné hodnoty použijeme křivku na obrázku 8.2, ze které odečteme potřebnou velikost úseků  $L_{dB}$  při daném maximálním překmitu. Zvolíme-li  $\Delta x_m = 30\%$ , vychází  $L_{dB} = 16dB$ . To znamená, že střední úsek charakteristiky  $|F_0(j\omega)|_{dB}$  s asymptotou  $-20dB/dek$  bude navazovat na asymptoty se sklonem  $-40dB/dek$  při amplitudách  $\pm 16dB$ . Počáteční sklon  $-40dB/dek$  změňíme časovou konstantou  $T$  na sklon  $-20dB/dek$  a časová konstanta  $3s$  ve jmenovateli přenosu  $F_0(p)$  jej opět vrátí na hodnotu  $-40dB/dek$ . Tím je určen tvar a poloha amplitudové části frekvenční charakteristiky  $|F_0(j\omega)|_{dB}$  (viz. obrázek 8.2)

První zlom asymptotické náhrady  $|F_0(j\omega)|_{dB}$  bude při frekvenci  $\omega_1 = 1/T = 0.009rad/s$ , odtud  $T \doteq 110s$  a zesílení  $K_{0dB} \doteq -82dB$ , což je  $K_0 \doteq 0.8 \cdot 10^{-4}$ .

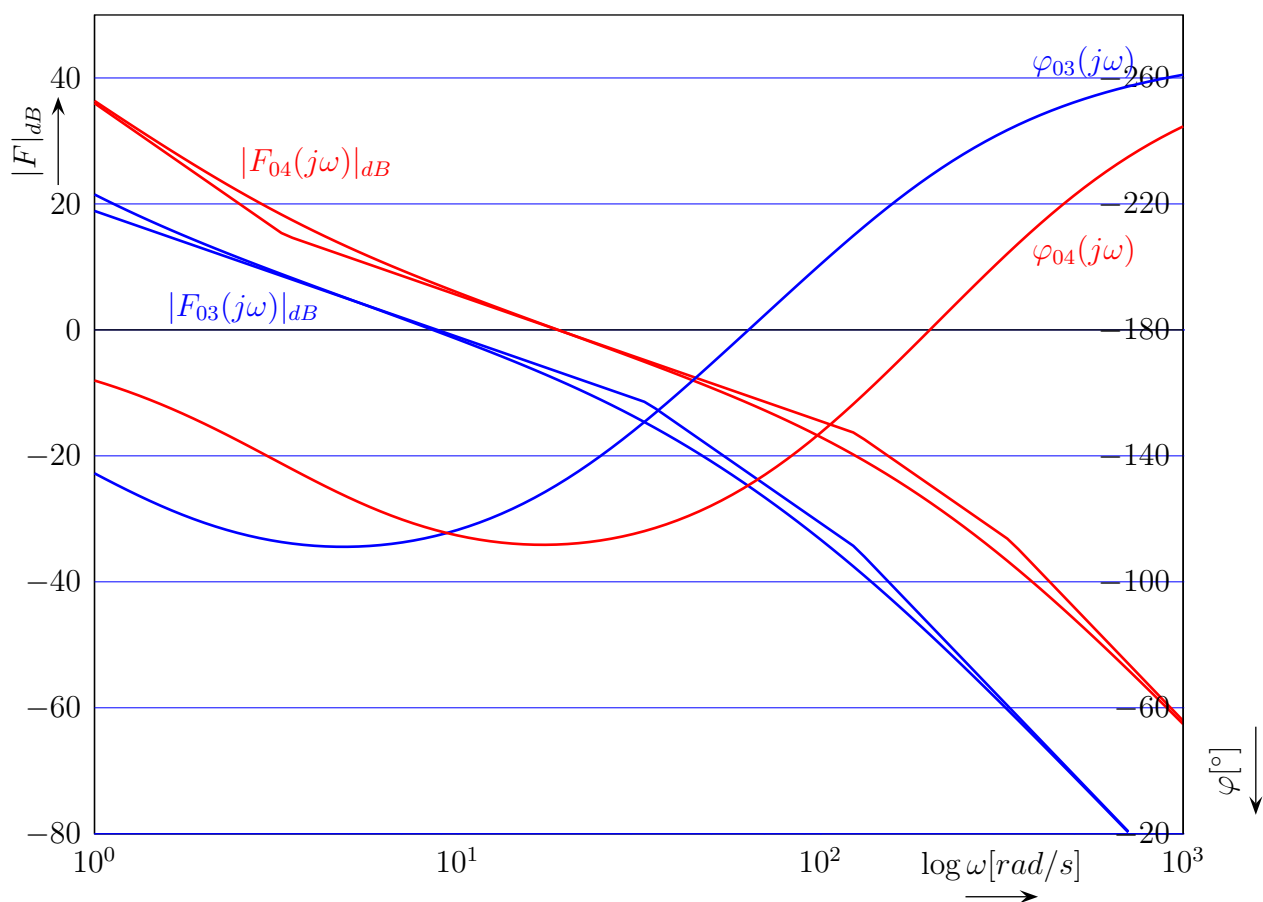
Přenos otevřeného obvodu bude

$$F_{03}(p) = 0.8 \cdot 10^{-4} \frac{110p + 1}{p^2(3p + 1)(0.8p + 1)}$$

Pro fázi platí

$$\varphi_{03}(\omega) = -\pi + \arctan 110\omega - \arctan 3\omega - \arctan 0.8\omega$$

Odpovídající fázová charakteristika je nakreslena v obrázku 8.2. Pro  $\omega_{\dot{r}} = 0.05rad/s$  odečteme fázovou bezpečnost téměř  $70^\circ$ . Zdánlivě je tato hodnota zbytečně vysoká, jde



**Obrázek 8.2:** Návrh PI a PID regulátoru pro astatickou soustavu k příkladu 8.2

však o systém s astatismem druhého řádu, a proto je vhodné tuto vyšší hodnotu dodržet. Všimněme si také pětinasobného snížení frekvence řezu oproti původnímu systému s P regulátorem. Použití PI regulátoru se kromě vyregulování konstantní poruchy projeví také výrazným zpomalením přechodného děje. Tento nepříznivý vliv můžeme ještě kompenzovat použitím PID regulátoru. Pak máme v čitateli regulátoru dvě časové konstanty. Jedna z nich může kompenzovat největší časovou konstantu a druhá bude, stejně jako v minulém případě určovat začátek úseku asymptoty se sklonem  $-20\text{dB/dek}$ . Z konstrukce na obrázku 8.2 plyne přenos otevřeného obvodu

$$F_{04}(p) = \frac{K_{01}(30p + 1)}{p^2(0.8p + 1)(0.3p + 1)}$$

Konstanta 0.3 ve jmenovateli přenosu  $F_{01}(p)$  je realizační konstanta  $\varepsilon$  z přenosu regulátoru

$$F_{R4}(p) = K_R \frac{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}{p(\varepsilon p + 1)}$$

Zvolíme ji opět z podmínky  $T_1/\varepsilon \leq 10^2$ , kde  $T_1 > T_2$ . Zesílení obvodu  $K_{01_{dB}} = -44\text{dB}$ , neboli  $K_{01} \doteq 0.0063$  a  $\omega_{\check{r}} \doteq 0.2\text{rad/s}$ . Pro fázi platí

$$\varphi_{04}(\omega) = -\pi + \arctan 30\omega - \arctan 0.8\omega - \arctan 0.3\omega$$

Z průběhu na obrázku 8.2 je vidět, že fázová bezpečnost se takřka nezměnila a frekvence řezu se zhruba rovná hodnotě původního obvodu s P regulátorem.

Z uvedených příkladů je vidět, že úspěšnost návrhu metodou standardních tvarů frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu závisí do určité míry na zkušenostech a intuici konstruktéra. Proto tento postup nelze dost dobře algoritmizovat a automatizovat (tak jako některé dále popsané metody). Použití současných programů lze tento návrh velkou měrou usnadnit. To nic nemění na nutnosti chápat vzájemné souvislosti mezi časovou a frekvenční doménou

### 8.1.1 Fázově neminimální systémy a systémy s dopravním zpožděním

Uvažujme, že řízená soustava je fázově neminimální (obsahuje nulu  $n = k$  v pravé polorovině roviny  $p$ ). Potom provádíme návrh tak, že do jmenovatele regulátoru umístíme pól  $p = -k$ . Tím zajistíme, že poměr  $\frac{-p+k}{p+k}$  bude mít amplitudovou charakteristiku rovnou jedné a neprojeví se tak na amplitudové charakteristice žádným zlomem. Projeví se však ve fázi. Fáze se mění s rostoucím kmitočtem od 0 do  $-\pi$  podle vzorce  $-2 \arctan(\omega/k)$ . Stejně se projevuje dopravní zpoždění  $e^{-pT_d}$ , které má amplitudovou charakteristiku rovnou jedné a fázovou charakteristiku rovnou  $-\omega T_d$ . Příspěvek ve fázové charakteristice se nám v obou případech nepříznivě projeví na fázové bezpečnosti. Tím jsme při návrhu regulátoru nuceni volit nižší kmitočet řezu  $\omega_{\check{r}}$ , čímž dochází ke zpomalení regulace.

### 8.1.2 Inverzní regulátor

V příkladu 8.1 jsme při návrhu PD regulátoru umístili nulu regulátoru do pólu soustavy. Tím jsme sice vytvořili neřiditelný systém, ale zbavili jsme se jednoho pólu ve jmenovateli soustavy. V této podkapitole provedeme diskuzi k návrhu, který by postupně tímto

způsobem eliminoval všechny nuly a póly systému tak, aby se dosáhlo přenosu otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{\omega_{\check{r}}}{p} \quad (8.1)$$

, kde  $\omega_{\check{r}}$  je požadovaný kmitočet řezu. Tento tvar  $F_0(p)$  je vhodný v případě, když se žádaná hodnota a porucha mění skokově, neboť zajišťuje nulovou ustálenou odchylku (pro skokovou změnu poruchy musí být integrátor v regulátoru), fázovou bezpečnost  $M_P = 90^\circ$  a dokonce nekonečnou amplitudovou bezpečnost ( $F_0(p)$  nikdy neprotne zápornou reálnou osu). Na základě vzorce (8.1) můžeme psát vzorec pro výpočet regulátoru.

$$F_R(p) = \frac{\omega_{\check{r}}}{p} F_S^{-1}(p) \quad (8.2)$$

Omezení této metody spočívá v tom, že pro soustavy s relativním stupněm druhým a vyšším nebude navržený regulátor realizovatelný. Toto omezení se dá vyřešit použitím realizačních konstant na vyšších frekvencích.

V případě PID regulátoru máme možnost kompenzovat dva póly soustavy. Doposud jsme jako měřítko pro návrh regulátoru uvažovali rychlost vyregulování změny žádané hodnoty. Podívejme se nyní, jak souvisí poloha nul regulátoru s rychlostí vyregulování poruchy. Uvažujme regulátor daný přenosem  $F_R(p) = \frac{B_R(p)}{A_R(p)}$ , který řídí soustavu  $F_S(p)$  na jejímž vstupu působí porucha  $u(t)$ . Přenos řízení

$$F_w(p) = \frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_R(p)F_S(p)} = \frac{\frac{B_R(p)}{A_R(p)}F_S(p)}{1 + \frac{B_R(p)}{A_R(p)}F_S(p)} \quad (8.3)$$

Nyní se pokusíme vyjádřit přenos poruchy  $F_u(p)$  s využitím  $F_w(p)$ .

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{F_S(p)}{1 + \frac{B_R(p)}{A_R(p)}F_S(p)} = \frac{A_R(p)}{B_R(p)}F_w(p) \quad (8.4)$$

Jak vidíme z (8.4), nuly regulátoru se nám zde objevily jako póly přenosu poruchy. Toto zjištění má velký význam. Poloha nul regulátoru takto rozhoduje o rychlosti vyregulování skokové poruchy. Snahou je umístit tyto nuly co nejvíce vlevo, t.j. aby se jejich zlom projevil na co nejvyšších kmitočtech. Zároveň musíme zajistit zvolenou fázovou bezpečnost. Z pohledu rychlosti vyregulování poruchy se proto jeví nejvhodnější umístění obou nul do stejného bodu. Na tomto pozorování je založena metoda Ziegler-Nicholse, se kterou se seznámíme v pozdější kapitole. Z tohoto důvodu také není vhodné kompenzovat dvojici komplexně sdružených pólů v soustavě dvojicí nul v regulátoru. I když bude reakce na skokovou změnu žádané hodnoty uspokojivá, reakce na skokovou změnu poruchy bude kmitat.

### 8.1.3 Vyregulování poruchy

V této kapitole budeme uvažovat, že porucha může vstupovat do soustavy v kterémkoliv bodě. To se dá vyjádřit obrázkem ... Pokud je  $F_P(p) = F_S(p)$ , pak to odpovídá poruše vstupující na vstup soustavy.

Uvažujme pro jednoduchost, že je porucha normalizovaná, takže  $|u(\omega)| \leq 1$ . Cílem řízení je dosáhnout  $|e(\omega)| \leq 1$ . Pro odchylku můžeme psát

$$E(j\omega) = -Y(j\omega) = -\frac{F_P(j\omega)}{1 + F_0(j\omega)}U(j\omega)$$

V případě nejhorší poruchy, tedy  $|u(\omega)| = 1$  požadujeme, aby  $|\frac{F_P(j\omega)}{1+F_0(j\omega)}| \leq 1$  pro všechny kmitočty  $\omega$ . To je stejné, jako požadavek

$$|1 + F_0(j\omega)| \geq |F_P(j\omega)|$$

Pro frekvence, kde  $F_0(j\omega) > 1$  se dá tato podmínka zjednodušit na tvar  $|F_0(j\omega)| > |F_P(j\omega)|$ . Protože zároveň nechceme zvyšovat velikost  $|F_0(j\omega)|$ , abychom nenarazili na problémy se stabilitou (zvláště kolem frekvence řezu), jeví se jako rozumné zvolit minimální možné  $F_{0_{min}}(p)$ , které zajistí, že  $|e(\omega)| \leq 1$ .

$$|F_{0_{min}}(p)| \approx |F_P(p)|$$

Pro regulátor platí

$$|F_{R_{min}}(p)| \approx \left| \frac{F_P(p)}{F_S(p)} \right| \quad (8.5)$$

V případě, že chceme zajistit nulovou ustálenou odchylku při působení konstantní poruchy, přidáváme do regulátoru integrátor. Potom

$$|F_R(p)| = \left| \frac{p+a}{p} \right| \left| \frac{F_P(p)}{F_S(p)} \right| \quad (8.6)$$

V případě, že porucha působí na vstupu systému, je  $F_P(p) = F_S(p)$ . Z rovnice (8.5) plyne, že ideální regulátor z hlediska této poruchy je proporcionální regulátor s jednotkovým zesílením.

Pokud porucha působí na výstupu, je  $F_P(p) = 1$ . Vhodným regulátorem je pak inverzní regulátor. To nijak nepřekvapuje, neboť na poruchu působící na výstupu soustavy se můžeme dívat jako na změnu žádané hodnoty, která okamžitě ovlivňuje výstup.

#### 8.1.4 Regulátor se dvěma stupni volnosti

Pro správné sledování žádané hodnoty obvykle požadujeme  $F_R(p) = \frac{1}{p}F_s^{-1}(p)$ . Pro potlačení poruchy požadujeme  $F_R(p) = \frac{1}{p}F_s^{-1}(p)F_P(p)$ . Oba požadavky se liší, tudíž je pochopitelné, že není možné dosáhnout jedním zpětnovazebním regulátorem splnění obou požadavků současně.

Pro řešení tohoto problému se dá použít regulátor se dvěma stupni volnosti. Tento regulátor zpracovává oba vstupy  $w(t)$  a  $y(t)$  nezávisle místo toho, aby pracoval pouze s regulační odchylkou  $e(t)$ . Existuje několik možných realizací regulátoru se dvěma stupni volnosti. V této kapitole budeme uvažovat realizaci, kde je žádaná hodnota předzpracována regulátorem  $F_{R2}(p)$  a regulátor  $F_{R1}(p)$  odstraňuje působení poruch a chyb v modelu soustavy (viz. obrázek 4.1a), kde  $R_{a1} = F_{R2}(p)$  a  $R_{a2} = F_{R1}(p)$ ). Návrh obou regulátorů se

provádí následovně. Nejprve se provede návrh regulátoru  $F_{R1}(p)$  tak, aby byla správně vyregulována porucha. Následně se navrhne regulátor  $F_{R2}(p)$ , aby bylo dosaženo požadovaného sledování žádané hodnoty  $F_{ref}(p)$ . Přenos celého obvodu je  $F_{R2}(p) \frac{F_{R1}(p)F_S(p)}{1+F_{R1}(p)F_S(p)}$ . Pokud máme  $F_{R1}(p)$  již nastaven a známe přenos soustavy  $F_S(p)$ , můžeme  $F_{R2}(p)$  dopočítat pomocí vzorce

$$F_{R2}(p) = F_{ref}(p) \frac{1 + F_{R1}(p)F_S(p)}{F_{R1}(p)F_S(p)}$$

Teoreticky se dá dosáhnout libovolného sledování žádané hodnoty. V praxi může vycházet  $F_{R2}(p)$  nestabilní, nebo nerealizovatelný. Regulátor  $F_{R2}(p)$  se v praxi volí jako poměr  $\frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ , kde  $T_1 > T_2$  volíme pokud chceme zrychlit sledování žádané hodnoty a  $T_1 < T_2$  volíme pokud ho chceme zpomalit. Někdy se používá jednoduchého setrvačného članku ( $T_1 = 0$ ).

### 8.1.5 Shrnutí

Metoda standardních tvarů frekvenčních charakteristik je vhodná pro návrh regulátorů pro stabilní soustavy. Je navíc vhodná pro soustavy obsahující dopravní zpoždění. Jak již vyplývá z jejího popisu a z vyřešených příkladů, nepředstavuje jednoznačný algoritmus návrhu, a vyžaduje jistou míru zkušeností.

Druhou nevýhodou je pracnost, která je v dnešní době kompenzována kvalitními programovými nástroji, jako je například `sisotool` v programu Matlab.

Nevýhodou metody inverzního regulátoru je skutečnost, že pokud jsou kompenzované póly daleko od sebe, dosáhneme sice výrazného zlepšení přechodného děje na změnu řízení, ale můžeme dosáhnout velmi špatné kompenzace poruchy. Nuly regulátoru se totiž objeví jako póly přenosu poruchy. Stejný problém může nastat u metody standardního tvaru frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu, čemuž se musíme snažit předejít.

## 8.2 Metoda optimálního modulu

Na rozdíl od metody standardních tvarů, která vycházela z požadovaného tvaru frekvenční charakteristiky otevřené smyčky pracuje metoda optimálního modulu s požadovaným tvarem frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky. Ta je dána přenosem řízení  $F_w(p)$ . Ze souvislostí mezi frekvenční a časovou oblastí víme, že přechodný děj bude optimální tehdy, bude-li  $|F_w(j\omega)| \doteq 1$  do co nejvyšších frekvencí a bude-li tento průběh monotónní, t.j. bez rezonančních překmitů. Tuto podmínku lze matematicky formulovat vztahem

$$\frac{d|F_w(j\omega)|}{d\omega} \leq 0 \tag{8.7}$$

Předpokládejme, že pro přenos řízení platí

$$F_w(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad m < n$$



Po dosazení  $p = j\omega$  budou v čitateli i jmenovateli vektory  $B(j\omega)$  a  $A(j\omega)$ , které vyjádříme pomocí jejich reálných a imaginárních částí.

$$F_w(j\omega) = \frac{c(j\omega) + jd(j\omega)}{f(j\omega) + jg(j\omega)} \quad \begin{array}{l} c(j\omega) = \Re B(j\omega) \quad d(j\omega) = \Im B(j\omega) \\ f(j\omega) = \Re A(j\omega) \quad g(j\omega) = \Im A(j\omega) \end{array}$$

Pro modul  $F_w(j\omega)$  platí

$$|F_w(j\omega)| = \sqrt{\frac{c^2(j\omega) + d^2(j\omega)}{f^2(j\omega) + g^2(j\omega)}} \quad (8.8)$$

Podmínka (8.7) platí i pro druhou mocninu modulu a to nás zbaví nutnosti pracovat s odmocninou.

$$|F_w(j\omega)|^2 = \frac{c^2(j\omega) + d^2(j\omega)}{f^2(j\omega) + g^2(j\omega)} = \frac{B_m\omega^{2m} + B_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \dots + B_1\omega^2 + B_0}{A_n\omega^{2n} + A_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots + A_1\omega^2 + A_0}$$

Porovnáním s rovnicí (8.8) získáme vztahy mezi koeficienty  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $a_i$  a  $b_i$

$$\begin{array}{ll} B_0 = b_0^2 & A_0 = a_0^2 \\ B_1 = b_1^2 - 2b_0b_2 & A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 \\ B_2 = b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4 & A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4 \\ B_3 = b_3^2 - 2b_2b_4 + 2b_1b_5 - 2b_0b_6 & A_3 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6 \\ \vdots & \vdots \\ B_{m-1} = b_{m-1}^2 - 2b_{m-2}b_m & A_{n-1} = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n \\ B_m = b_m^2 & A_n = a_n^2 \end{array}$$

Dříve uvedené podmínky pro optimální průběh  $|F_w(j\omega)|$  můžeme nyní vyjádřit ve formě

$$\frac{B_i}{A_i} \leq \frac{B_0}{A_0} \quad (8.9)$$

Tím je zaručena monotónnost průběhu  $|F_w(j\omega)|$ . Frekvence, po kterou bude  $|F_w(j\omega)|$  mít požadovanou hodnotu  $\doteq 1$  bude tím vyšší, čím větší počet koeficientů  $A_i$  a  $B_i$  bude splňovat podmínku (8.9). Počet koeficientů splňujících tuto podmínku závisí na počtu volitelných konstant korekčních členů v obvodě. Tak například pro regulátory typu P a I stačí jedna rovnice, pro typy PI a PD dvě a pro PID regulátor stačí tři rovnice. Je-li počet podmínkových rovnic  $k$  větší než je stupeň polynomu čitatele  $m$ , jsou koeficienty  $B_j$ , kde  $j > (k - m)$ , rovny nule. Z podmínky (8.9) pak plyne i  $A_j = 0$ .

Návrh konstant regulátoru metodou optimálního modulu nezaručuje stabilitu obvodu. Tu je třeba vždy zvlášť kontrolovat.

**Příklad 8.3** Metodou optimálního modulu určete koeficienty regulátorů P, PD, PI a PID pro soustavu

$$F_S(p) = \frac{0.1}{p(3p+1)(0.8p+1)}$$

Pro přenos řízení při zapojeném P regulátoru platí

$$F_w(p) = \frac{0.1K_R}{p(3p+1)(0.8p+1) + 0.1K_R} = \frac{0.1K_R}{2.4p^3 + 3.8p^2 + p + 0.1K_R}$$

kde  $K_R$  je zesílení regulátoru. Koeficienty  $A_i$ ,  $B_i$  jsou

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.01K_R^2 & A_0 &= 0.01K_R^2 \\ B_1 &= 0 & A_1 &= 1 - 2 \cdot 0.1K_R \cdot 3.8 = 1 - 0.76K_R \end{aligned}$$

Protože hledáme jediný parametr  $K_R$ , stačí jediná rovnice

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_0}{A_0} = 1 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0$$

Odtud vypočteme  $K_R = 1/0.76 = 1.32$ . Metodou standardního tvaru frekvenčních charakteristik jsme navrhli  $K_{R1} = 2.5$ , což je asi o 5dB více. Nahlédnutím do obrázku 8.1 vidíme, že v obvodu navrženém podle optimálního modulu by byla fázová bezpečnost asi 65°. Je snadné ukázat, že zpětnovazební obvod s navrženým regulátorem je stabilní.

Při použití PD regulátoru bude přenos uzavřeného obvodu dán rovnicí

$$F_w(p) = \frac{0.1K_R(Tp+1)}{p(3p+1)(0.8p+1)(\varepsilon p+1) + 0.1K_R(Tp+1)}$$

Za realizační konstantu dosadíme  $\varepsilon = 0.05$  a dostaneme

$$F_w(p) = \frac{0.1K_R(Tp+1)}{0.12p^4 + 2.59p^3 + 3.85p^2 + (1 + 0.1K_R T)p + 0.1K_R}$$

Pro  $A_i$ ,  $B_i$  platí

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.01K_R^2 & A_0 &= 0.01K_R^2 \\ B_1 &= 0.01K_R^2 T^2 & A_1 &= (1 + 0.1K_R T)^2 - 2 \cdot 0.1K_R \cdot 3.85 \\ B_2 &= 0 & A_2 &= 3.85^2 - 2(1 + 0.1K_R T) \cdot 2.59 + 0.1K_R \cdot 0.12 \cdot 2 \end{aligned}$$

Nyní budeme formulovat dvě rovnice

$$\frac{B_1}{A_1} = 1 \quad A_2 = 0$$

Řešením těchto rovnic získáme konstanty PD regulátoru  $K_R$  a  $T$ :

$$K_R = 6.21 \quad T = 3.04$$

Volba konstanty  $T$  je stejná jako při metodě standardních tvarů, zesílení je zhruba o 8dB sníženo. Na obrázku 8.1 vidíme, že opět je systém navržen na fázovou bezpečnost 65°. Opět nesmíme zapomenout ověřit stabilitu zpětnovazební obvodu s navrženým regulátorem. Snadno zjistíme pomocí některého algebraického kritéria, že je stabilita zaručena.

*Poznámka:*

Dosadíme-li do přenosu uzavřeného obvodu pouze ideální přenos PD regulátoru, bude jeho tvar

$$F_w(p) = \frac{0.1K_R(Tp + 1)}{p(3p + 1)(0.8p + 1) + 0.1K_R(Tp + 1)} = \frac{0.1K_R(Tp + 1)}{2.4p^3 + 3.8p^2 + (1 + 0.1K_RT)p + 0.1K_R}$$

Odtud pro  $A_i$ ,  $B_i$  platí

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.01K_R^2 & A_0 &= 0.01K_R^2 \\ B_1 &= 0.01K_R^2T^2 & A_1 &= (1 + 0.1K_RT)^2 - 2 \cdot 0.1K_R \cdot 3.8 \\ B_2 &= 0 & A_2 &= 3.8^2 - 2(1 + 0.1K_RT) \cdot 2.4 \end{aligned}$$

Řešením stejných podmínkových rovnic jako v případě reálného PD regulátoru získáme řešení

$$K_R \doteq 6.6 \quad T \doteq 3.04$$

Snadno se lze přesvědčit, že stabilita zpětnovazebního zapojení je zajištěna také v tomto případě. Vidíme, že obě varianty se příliš neliší, o čemž se opět můžeme přesvědčit pohledem do frekvenčních charakteristik.

Pro PI regulátor bude přenos uzavřeného obvodu dán rovnicí

$$F_w(p) = \frac{0.1K_R(Tp + 1)}{p^2(3p + 1)(0.8p + 1) + 0.1K_R(Tp + 1)}$$

Pro koeficienty  $A_i$ ,  $B_i$  platí

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.01K_R^2 & A_0 &= 0.01K_R^2 \\ B_1 &= 0.01K_R^2T^2 & A_1 &= 0.01K_R^2T^2 - 2 \cdot 0.1K_R \\ B_2 &= 0 & A_2 &= 1 - 2 \cdot 0.1K_RT \cdot 3.8 + 2 \cdot 0.1K_R \cdot 2.4 \end{aligned}$$

První podmínka

$$\frac{B_1}{A_1} < \frac{B_0}{A_0} = 1$$

Z rovnic pro koeficienty  $B_1$  a  $A_1$  však vidíme, že tuto podmínku nelze pro daný typ regulátoru splnit. Parametry tohoto obvodu nelze metodou optimálního modulu navrhnout, neboť na charakteristice  $|F_w(j\omega)|$  bude vždy existovat určité rezonanční zvětšení, což odporuje definici optimálního modulu.

Pro PID regulátor bude platit

$$F_w(p) = \frac{0.1K_R(up^2 + vp + 1)}{p^2(3p + 1)(0.8p + 1) + 0.1K_R(up^2 + vp + 1)}$$

kde  $u$  a  $v$  jsou koeficienty u  $p^2$  a  $p^1$  v čitateli přenosu regulátoru. Realizační konstantu zatím neuvažujeme. Koeficienty  $B_1$  a  $A_1$  určují rovnice

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.01K_R^2 & A_0 &= 0.01K_R^2 \\ B_1 &= 0.01K_R^2v^2 - 0.02K_R^2u & A_1 &= 0.01K_R^2v^2 - 0.2K_R(1 + 0.1K_Ru) \\ B_2 &= 0.01K_R^2u^2 & A_2 &= (1 + 0.1K_Ru)^2 - 0.76K_Rv + 0.48K_R \\ B_3 &= 0 & A_3 &= 3.8^2 - 4.8(1 + 0.1K_Ru) \end{aligned}$$

Z rovnic pro koeficienty  $B_1$  a  $A_1$  však vidíme, že tuto podmínku nelze opět pro daný typ regulátoru splnit. Důvod je stejný jako v případě pokusu o návrh PI regulátoru.

Metodu optimálního modulu nelze obecně použít v případě, kdy je v přenosu otevřené smyčky více než jeden astatismus. Tato podmínka není splněna ani v případě PI, ani v případě PID regulátoru. Stejně bychom dopadli, kdybychom se pokusili navrhnout reálný PID regulátor se zvolenou realizační konstantou.

Pro často používanou aproximaci statických regulovaných soustav soustavou  $n$ -tého řádu se stejnými časovými konstantami

$$F_S(p) = \frac{k_S}{(Tp + 1)^n}$$

byly hodnoty různých typů regulátorů vypočteny a jsou uvedeny v tabulce 8.1. Přenos

Typ	P	I	PI	PID
konst.	$k_p = \frac{1}{k_S(n-1)}$ $k_d = k_i = 0$	$k_i = \frac{1}{k_S T 2n}$ $k_d = k_p = 0$	$k_p = \frac{n+2}{k_S 4(n-1)}$ $k_i = \frac{3}{k_S T 4(n-1)}$ $k_d = 0$	$k_p = \frac{17n+16}{16k_S(n-2)}$ $k_i = \frac{15}{16k_S T(n-2)}$ $k_d = \frac{T(n+1)(n+3)}{k_S 16(n+2)}$

**Tabulka 8.1:** Vzorce pro výpočet regulátorů metodou optimálního modulu pro soustavy se stejnými časovými konstantami

regulátoru je předpokládán ve tvaru

$$F_R(p) = k_p + \frac{k_i}{p} + k_d p$$

**Příklad 8.4** Uvažujme systém druhého řádu s proměnným tlumením  $\xi$

$$F_w(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

Vypočítejte hodnotu tlumení  $\xi$  metodou optimálního modulu.

Pro koeficienty  $A_i$  a  $B_i$  platí

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & A_0 &= 1 \\ B_1 &= 0 & A_1 &= 4T^2\xi^2 - 2T^2 \end{aligned}$$

Výsledné tlumení  $\xi$  je dáno rovnicí

$$4T^2\xi^2 - 2T^2 = 0$$

jejímž řešením získáváme

$$\xi_{om} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707$$

Přenos uzavřené smyčky je stabilní pro všechny kladné hodnoty časové konstanty  $T$  a tlumení  $\xi$ . Pokud výsledek srovnáme s návrhem podle kvadratického integrálního kritéria (viz. příklad 7.1) zjistíme, že metoda optimálního modulu dává tlumenější průběh přechodného děje, protože hodnota tlumení podle kvadratického integrálního kritéria vychází  $\xi_{kik} = 0.5$ . Metoda optimálního modulu dává stejné výsledky jako metoda optimálního rozložení pólů v komplexní rovině.

### 8.2.1 Shrnutí

Metoda optimálního modulu vychází z požadovaného tvaru frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky. Snaží se dosáhnout toho, aby na frekvenční charakteristice uzavřené smyčky nebylo rezonanční převýšení. Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o aproximaci, je nutné vždy provést následný test stability uzavřeného obvodu a po vykreslení frekvenční charakteristiky uzavřeného obvodu může po návrhu touto metodou nějaké rezonanční převýšení být. Metodu nelze použít pro regulační obvody, ve kterých je více než jeden astatismus v otevřené smyčce.

## 8.3 Metody optimálního časového průběhu

I když požadavky na regulační děj jsou často definovány právě v časové oblasti, t.j. tvarem přechodové nebo impulsní charakteristiky, přímý návrh regulátoru podle nich neprovádíme. Výjimku tvoří metody založené na simulaci systému. Většinou jsou původní požadavky převedeny do odpovídajícího tvaru frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu, nebo na požadované rozložení pólů přenosu uzavřeného obvodu. Jednu z možností návrhu poskytuje minimalizace některého z integrálních kritérií jakosti regulace. Pro algebraický návrh je však k dispozici prakticky pouze kvadratické kritérium, neboť analytický výpočet ostatních kritérií je velmi obtížný. U kvadratického kritéria jsou však výsledky návrhu poměrně málo tlumené průběhy. Proto se těchto metod používá spíše pro porovnání kvality systémů s různými typy regulátorů.

**Příklad 8.5** *Navrhněte proporcionální regulátor  $P$ , který bude minimalizovat kvadratickou regulační plochu, pro soustavu*

$$F_S(p) = \frac{0.1}{p(3p+1)(0.8p+1)}$$

Pro výpočet kvadratické regulační plochy použijeme Nekolného doplněk Routh-Schurova kritéria (kapitola 7.1.2). K tomu potřebujeme znát obraz odchylky při skokové změně řídicí veličiny. V našem případě platí

$$E(p) = \frac{1}{p} F_E(p) = \frac{(3p+1)(0.8p+1)}{p(3p+1)(0.8p+1) + 0.1K_R} = \frac{2.4p^2 + 3.8p + 1}{2.4p^3 + 3.8p^2 + p + 0.1K_R}$$

Na koeficienty jmenovatele a čitatele aplikujeme Routh-Schurův algoritmus

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 2.4 \quad 3.8 \quad 1 \\
 -2.4 \quad \quad -0.063K_R \\
 \hline
 3.8 \quad 1 - 0.063K_R \quad 0.1K_R \\
 -3.8 \\
 \hline
 1 - 0.063K_R \quad 0.1K_R
 \end{array} & \left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{2.4}{3.8} = 0.63 \\ \alpha_2 = \frac{3.8}{1-0.063K_R} \\ \alpha_3 = \frac{1-0.063K_R}{0.1K_R} \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 2.4 \quad 3.8 \quad 1 \\
 -2.4 \quad \quad -0.063K_R \\
 \hline
 3.8 \quad 1 - 0.063K_R \\
 -3.8 \\
 \hline
 1 - 0.063K_R
 \end{array} & \left. \begin{array}{l} \beta_1 = 0.63 \\ \beta_2 = \frac{3.8}{1-0.063K_R} \\ \beta_3 = \frac{1-0.063K_R}{0.1K_R} \end{array} \right|
 \end{array}$$

Velikost kvadratické regulační plochy je

$$J_k = \frac{1}{2} \left[ 0.63 + \frac{3.8}{1 - 0.063K_R} + \frac{1 - 0.063K_R}{0.1K_R} \right]$$

Minimum tohoto výrazu určíme z podmínky

$$\frac{dJ_k}{dK_R} = 0 \tag{8.10}$$

Vypočtená hodnota je  $K_R = 4.6$ . Ve srovnání s metodou standardních tvarů je to takřka dvojnásobek a proti hodnotě určené metodou optimálního modulu je to 3.5 násobek. Z obrázku 8.1 je vidět, že fázová bezpečnost je v tomto případě značně nízká  $MP = 35^\circ$ . Kromě toho i v tomto jednoduchém případě musíme pro výpočet rovnice (8.10) řešit algebraickou rovnici třetího řádu (iterací). I tento příklad předurčuje použití této metody spíše pro analýzu než pro syntézu regulačního obvodu.

## 8.4 Metoda Ziegler-Nicholsova

Jedná se o jednoduchou metodu, která nevyžaduje nijak hluboké vědomosti z oblasti teorie řízení dynamických systémů. V praxi je oblíbená a hojně používaná právě pro svoji jednoduchost. Metoda vyžaduje měření na reálném objektu, model soustavy, případně simulačně získaná data z modelu.

Předpokládáme regulátor typu PID s přenosem

$$F_R(p) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right) \tag{8.11}$$

Princip metody se dá shrnout do následujících kroků.

1. vyřadíme integrační a derivační složku PID regulátoru ( $T_D = 0$  a  $T_I = \infty$ )
2. zvyšujeme zesílení proporcionální složky  $K_R$ , dokud nedosáhneme meze stability. Hodnota  $K_R$ , při kterém v obvodu vznikly netlumené kmity, se nazývá kritické zesílení a značí se  $K_{krit}$ . Perioda netlumených kmitů se nazývá kritická perioda a značí se  $T_{krit}$

Typ regulátoru	$K_R$	$T_I$	$T_D$
P	$K_R = 0.5K_{krit}$	-	-
PI	$K_R = 0.45K_{krit}$	$T_I = 0.85T_{krit}$	-
PD	doladíme na optimální hodnotu	-	$T_D = 0.12T_{krit}$
PID	$K_R = 0.6K_{krit}$	$T_I = 0.5T_{krit}$	$T_D = 0.125T_{krit}$

**Tabulka 8.2:** Vzorce pro návrh parametrů regulátoru metodou Ziegler-Nicholse

3. pokud máme zjištěny kritické hodnoty  $K_{krit}$  a  $T_{krit}$ , můžeme dosazením do vzorečků v tabulce 8.2 určit parametry zvoleného regulátoru

Metoda předpokládá uvedení regulačního obvodu na mez stability. Soustava pak kmitá netlumenými kmity. Takovýto experiment není z důvodů technologických a nebo bezpečnostních pro všechny soustavy přípustný. Pro takovéto soustavy máme čtyři možnosti

- určit kritické parametry z přechodové charakteristiky
- použít model soustavy a kritické parametry určit z výsledků simulace
- použít model soustavy a kritické parametry určit výpočtem
- použít relé bez hystereze

Postup určení kritických parametrů z výsledků simulace se nijak neliší od zjišťování těchto hodnot na reálném systému. Ostatní body si probereme postupně v následujících podkapitolách. Nyní se ještě vrátíme ke vzorečkům v tabulce 8.2. Zkusme si dosadit hodnoty parametrů PID regulátoru do vzorce (8.11).

$$\begin{aligned}
 F_R(p) &= 0.6K_{krit}\left(1 + \frac{2}{T_{krit}p} + 0.125T_{krit}p\right) = \frac{1.2K_{krit}}{T_{krit}} \frac{0.0625T_{krit}^2p^2 + 0.5T_{krit}p + 1}{p} \\
 &= \frac{1.2K_{krit}}{T_{krit}} \frac{(0.25p + 1)^2}{p}
 \end{aligned}$$

Jak vidíme, regulátor má obě nuly umístěny ve stejném bodě a to v  $n_{1,2} = \frac{1}{0.25T_{krit}}$ . Tím takto navržený regulátor optimálně vyreguluje poruchu (diskuze v kapitole 8.1.1).

#### 8.4.1 Určení kritických parametrů z přechodové charakteristiky

Pokud máme k dispozici přechodovou charakteristiku, můžeme určit kritické parametry odečtením doby průtahu  $T_u$  a doby náběhu  $T_n$ . Pro kritické parametry platí přibližné vztahy

$$K_{krit} \doteq \frac{\pi T_n}{2 T_u} + 1 \quad T_{krit} \doteq 4T_u$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorečků v tabulce 8.2 a tím získáme parametry zvoleného regulátoru.

### 8.4.2 Určení kritických parametrů výpočtem ze známého modelu

Pokud máme model soustavy, zajímá nás zesílení, které přivede soustavu na mez stability. K tomu můžeme použít různých postupů.

Podle Nyquistova kritéria stability je uzavřený obvod na mezi stability, pokud frekvenční charakteristika otevřené smyčky prochází bodem  $(-1, 0)$ . Na základě tohoto kritéria stačí určit průsečík frekvenční charakteristiky  $F_0(j\omega)$  se zápornou částí reálné osy  $(-x, 0)$ . Kritické zesílení je potom  $K_{krit} = 1/x$ . Určení tohoto průsečíku není pro soustavy vyšších řádů jednoduché, proto je lepší použít pro určení kritického zesílení některého z algebraických kritérií stability (Routh-Schurovo nebo Hurwitzovo). Kritická perioda se spočítá z podmínky pro nulovou imaginární část.

### 8.4.3 Rozkmitávání použitím relé bez hystereze

Pro zjištění kritických parametrů soustavy se někdy používá místo proporcionálního regulátoru ideálního relé bez hystereze. Výhodou je, že kmity jsou potom řízené (amplituda kmitů závisí na amplitudě relé) a nehrozí proto, že by se nám systém nekontrolovaně rozkmital. Protože relé je nelineární prvek, je tato problematika mimo rámec tohoto kurzu.

#### Příklad 8.6 *U soustavy s přenosem*

$$F_S(p) = \frac{0.1}{p(3p+1)(0.8p+1)}$$

byly experimentálně změřeny kritické parametry  $K_{krit} = 16$  a  $T_{krit} = 10s$ . Navrhněte regulátor PID metodou Ziegler-Nicholse.

Podle tabulky 8.2 dostaneme tyto hodnoty parametrů regulátoru

$$K_R = 9.6 \quad T_I = 5s \quad T_D = 1.25s$$

odkud přenos regulátoru

$$F_R(p) = 1.9 \frac{(2.5p+1)^2}{p}$$

Srovnáním výsledků metody Ziegler-Nicholse s výsledky metodou standardních tvarů a metodou optimálního modulu vidíme, že dostáváme další možnou variantu nastavení konstant regulátoru, nepříliš odlišnou od obou předchozích.

### 8.4.4 Shrnutí

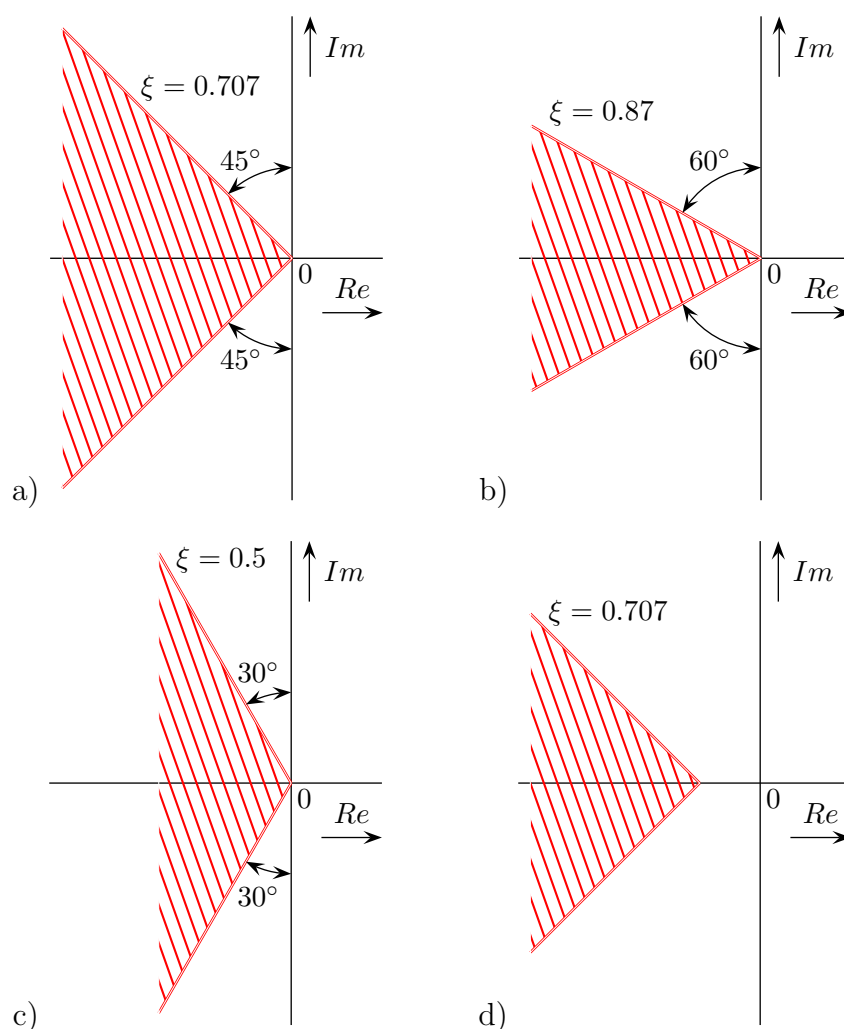
Metoda Ziegler-Nicholse je výhodná v případě, kdy nemáme k dispozici přenos soustavy, ale můžeme na ní provádět experiment spočívající v přivedení soustavy na mez stability. Toto může být v některých případech nebezpečné, proto je lepší využít rozkmitávání pomocí relé bez hystereze, kdy je amplituda kmitů řízena výstupní amplitudou relé.



## 8.5 Metoda požadovaného rozložení pólů uzavřeného obvodu

Tato metoda využívá vztahu mezi časovými odezvami a rozložením pólů přenosu, v tomto případě uzavřené smyčky. Používá již dříve vysvětlené konstrukce kořenového hodografu. Je vhodná pro návrh struktury korekčních členů (t.j. typu jejich přenosové funkce). Použití výpočetní techniky umožní určení konkrétních konstant regulátoru. (`rltool` programu Matlab).

Stanovíme-li požadavky na tlumení uzavřeného obvodu, vymezíme tím současně jistou oblast v rovině  $p$ , ve které mohou ležet póly uzavřené smyčky. Z obrázku 8.3 je vidět, že větší hodnotě tlumení odpovídá výšeč, jejíž omezující přímky svírají s imaginární osou větší úhel. Nejdůležitější pro nás bude poloha dominantních pólů (póly ležící nejbliže od imaginární osy). Zrychlení odezvy dosáhneme posunem těchto pólů co nejvíce vlevo. Takto modifikovanou výšeč ukazuje obrázek 8.3 d).



**Obrázek 8.3:** Výšeče v rovině  $p$  odpovídající různým hodnotám tlumení

**Příklad 8.7** *Pro soustavu*

$$F_S(p) = \frac{0.1}{p(3p + 1)(0.8p + 1)}$$

navrhněte pomocí programu Matlab proporcionální regulátor  $K_R$ , který zajistí tlumení dominantních pólů  $\xi = 0.707$

Nejprve zadáme přenos soustavy, například ve tvaru podílu dvou polynomů

```
>> Fs=tf([0.1],[2.4 3.8 1 0])
```

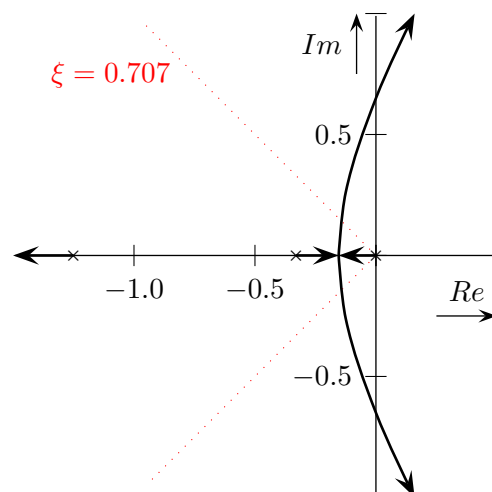
Nyní spustíme příkaz `rltool`, který spustí nástroj `sisotool` se zobrazením kořenového hodografu.

```
>> rltool(Fs);
```

Kliknutím pravého tlačítka myši na grafu kořenového hodografu se zobrazí menu, ze kterého vybereme Design constraints (Návrhová omezení) - New (Nové) typ Damping ratio (Tlumení) a nastavíme ho na 0.707. Tím se nám v grafu objeví výseč odpovídající zadanému tlumení. Pomocí funkce Zoom si přiblížíme oblast, kde se nacházejí dominantní póly. V našem případě je to obdélník daný body  $(-0.3, -0.3j)$  a  $(0, 0.3j)$ . Nyní uchopíme myší jeden pól (červený obdélník) a táhneme jej směrem k šedé hranici výseče. Aktuální hodnotu tlumení, společně s aktuální polohou pólu, je možné sledovat ve spodní části okna. Pokud přeneseme pól na tuto hranici, leží v bodě  $(-0.145 \pm 0.145j)$ . V horní části okna tomu odpovídá Current compensator (aktuální regulátor)

$$C(p) = 1.31$$

Na obrázku 8.4 vidíme kořenový hodograf odpovídající zadané soustavě při použití P regulátoru.



**Obrázek 8.4:** Kořenový hodograf s P regulátorem

**Příklad 8.8** Pro stejnou soustavu jako v minulém případě navrhnete PD regulátor, který zajistí tlumení dominantních pólů přenosu uzavřené smyčky  $\xi = 0.707$ .

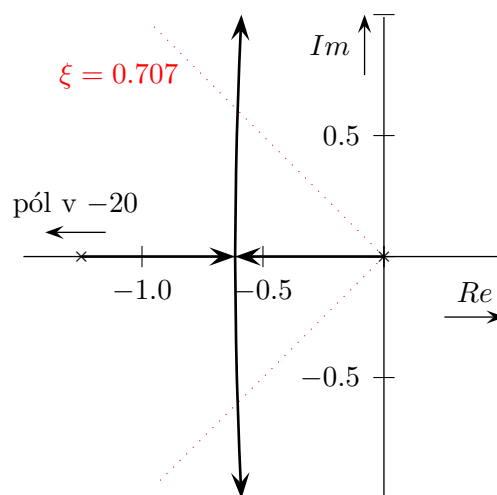
Začátek je stejný jako v minulém případě. Přidejme do regulátoru  $C(p)$  jednu nulu, čímž vytvoříme PD regulátor. Podobně jako v případě metody standardních tvarů frekvenčních charakteristik ji umístíme do bodu  $(-1/3, 0)$ , kde vykompenzuje pól přenosu soustavy. Umístění pólu provedeme tak, že najedeme na část okna Siso Design Tool, kde je vidět Current compensator a stlačíme tlačítko myši. Objeví se okno, ve kterém můžeme přidávat nuly a póly do regulátoru  $C(p)$ . Opět uchopíme jeden dominantní pól a přetáhneme ho na hranici výseče. Pól potom bude ležet v bodě  $(-0.625 \pm 0.625j)$ . Regulátor je dán přenosem

$$C(p) = 6.25(3p + 1)$$

Protože tento přenos je nerealizovatelný, vložíme realizační konstantu (pól) do bodu  $(-20, 0)$ . To se nám projeví tak, že dominantní póly budou mimo definovanou výseč. Přetažením jednoho z nich na hranici do bodu  $(-0.606 \pm 0.606j)$  se změní hodnota zesílení PD regulátoru na 5.86. Výsledný přenos regulátoru je potom

$$C(p) = 5.86 \frac{3p + 1}{0.05p + 1}$$

Kořenový hodograp soustavy s PD regulátorem je na obrázku 8.5. Všimněme si, že poloha dominantních pólů se při použití PD regulátoru posune, ve srovnání příkladem s regulátorem P (obrázek 8.4), asi čtyřikrát dále od imaginární osy. To odpovídá přibližně čtyřnásobnému zvýšení rychlosti odezvy zpětnovazebního zapojení na jednotkový skok.



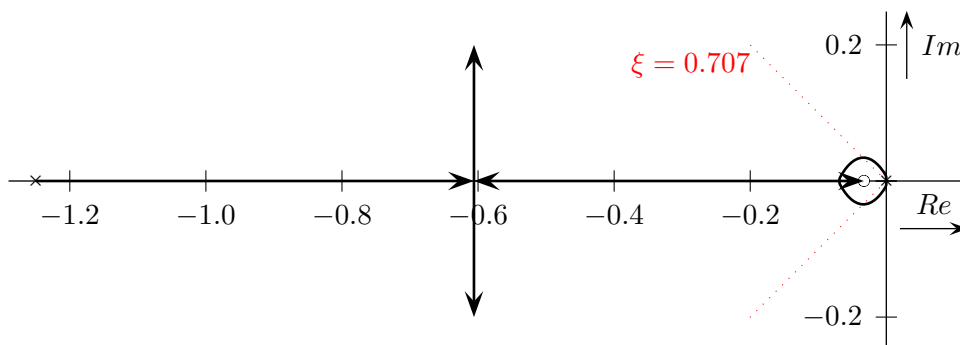
**Obrázek 8.5:** Kořenový hodograp s PD regulátorem

**Příklad 8.9** Srovnajte kořenové hodografy PID regulátorů, které byly navrženy metodou standardních tvarů frekvenčních charakteristik, metodou optimálního modulu a metodou Ziegler-Nicholsovou. Srovnání provedte s ohledem na hodnotu tlumení  $\xi = 0.707$ .

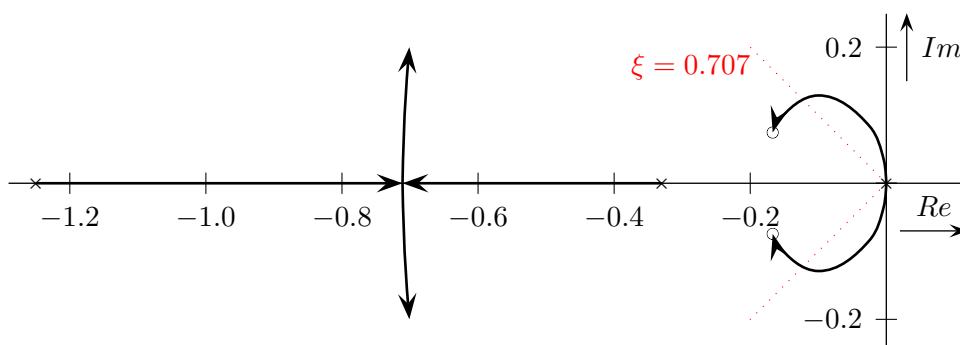
Pro jednoduchost budeme ve všech třech případech uvažovat verze PID regulátorů bez realizačních konstant. Jednotlivými návrhovými metodami jsme postupně získali následující přenosy otevřené smyčky (bez zesílení proporcionální složky, které pro tvar kořenového hodografu nepotřebujeme)

$$F_0(p) = \frac{K_0(30p + 1)}{p^2(0.8p + 1)} \quad F_0(p) = \frac{K_0(30p^2 + 10p + 1)}{p^2(3p + 1)(0.8p + 1)} \quad F_0(p) = \frac{K_0(2.5p + 1)^2}{p^2(3p + 1)(0.8p + 1)}$$

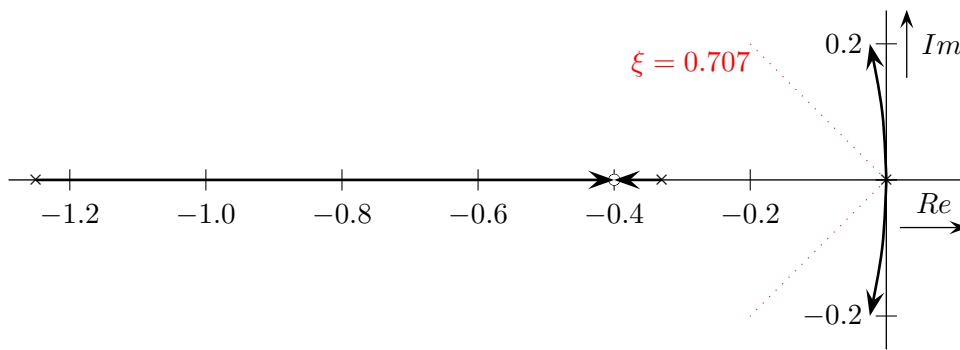
Jejich kořenové hodografy jsou znázorněny na obrázcích 8.6, 8.7 a 8.8. Nyní se na tyto obrázky podívejme podrobněji. Metoda optimálního modulu (obrázek 8.7) dává při požadované hodnotě tlumení  $\xi = 0.707$  rychlejší přechodný děj, neboť průsečíky větví kořenového hodografu s výsečí, která odpovídá zadanému tlumení, leží více vlevo od imaginární osy než je tomu na obrázku 8.6 získaném metodou standardních tvarů frekvenčních charakteristik. Zajímavý je výsledek získaný návrhovou metodou Ziegler-Nicholsovou (8.8). Dvě větve kořenového hodografu s dominantními póly totiž leží mimo výseč odpovídající požadovanému tlumení, tudíž pro jakékoliv zesílení není možné dosáhnout s takto rozloženými nulami PID regulátoru požadovaného tlumení.



**Obrázek 8.6:** Kořenový hodograf pro soustavu s PID regulátorem navrženým metodou standardních tvarů frekvenčních charakteristik



**Obrázek 8.7:** Kořenový hodograf pro soustavu s PID regulátorem navrženým metodou optimálního modulu



**Obrázek 8.8:** Kořenový hodograf pro soustavu s PID regulátorem navrženým metodou Zieglera-Nicholse

### 8.6 Metoda standardních tvarů charakteristického polynomu

Jedná se opět o návrh, který se snaží definovat tvar jmenovatele přenosu uzavřeného obvodu, kterému se říká charakteristický polynom. Z předchozích kapitol víme, že kořeny charakteristického polynomu jsou určující pro dynamiku uzavřeného obvodu. Pro různé typy astatismu v otevřeném obvodě a řád charakteristického polynomu lze předem stanovit optimální hodnoty koeficientů u jednotlivých mocnin (respektive jejich vzájemný poměr). Pro různě definované požadavky na časový průběh (nejčastěji maximální velikost překmitu) byly vypočteny různé standardní tvary. Jedny z nejčastěji používaných jsou Witeley-ho tvary, které platí pro soustavy s astatismem 1. řádu a regulátory typu P, PI, PD a PID. Tyto tvary charakteristických polynomů jsou v bezrozměrném tvaru uvedeny v tabulce 8.3.

Typ reg.	n	Koeficienty standardních tvarů						
P	2		1	1.4	1			
	3		1	2	2	1		
	4		1	2.6	3.4	2.6	1	
	5	1	3.2	5.2	5.2	3.2	1	
	6	1	3.7	7.5	9.1	7.5	3.7	1
PD nebo PI	2		1	2.5	1			
	3		1	5.1	6.3	1		
	4		1	7.2	16	12	1	
	5	1	9	29	38	18	1	
	6	1	11	43	83	73	25	1
PID	3		1	6.7	6.7	1		
	4		1	7.9	15	7.9	1	
	5	1	18	69	69	18	1	
	6	1	36	251	486	251	36	1

**Tabulka 8.3:** Whiteley-ho tvary charakteristických polynomů v bezrozměrném tvaru

Pro konkrétní použití je třeba charakteristický polynom upravit na bezrozměrný tvar.

V tomto tvaru je první i poslední koeficient roven jedné.

Uvažujme charakteristický polynom

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

Převod na bezrozměrný tvar se provede vydělením koeficientem  $a_0$  a zavedením frekvenční transformace

$$\frac{a_n}{a_0} p^n = q^n$$

kde  $q$  je nová bezrozměrná proměnná.

**Příklad 8.10** *K soustavě*

$$F_S(p) = \frac{0.1}{p(3p+1)(0.8p+1)}$$

navrhněte metodou standardních tvarů charakteristického polynomu PD regulátor ve tvaru

$$F_R(p) = K_r(Tp+1)$$

Nejprve si vyjádříme charakteristický polynom

$$2.4p^3 + 3.8p^2 + (1 + K_0T)p + K_0$$

Nejprve podělíme všechny koeficienty  $K_0$ , čímž dostaneme

$$\frac{2.4}{K_0} p^3 + \frac{3.8}{K_0} p^2 + \frac{(1 + K_0T)}{K_0} p + 1 \quad (8.12)$$

Nyní zavedeme substituci

$$\frac{2.4}{K_0} p^3 = q^3 \quad \rightarrow \quad p = q \sqrt[3]{\frac{K_0}{2.4}}$$

Dosazením za  $p$  do rovnice (8.12) dostaneme

$$q^3 + \frac{3.8}{K_0} \left(\frac{K_0}{2.4}\right)^{\frac{2}{3}} q^2 + \frac{1 + K_0T}{K_0} \left(\frac{K_0}{2.4}\right)^{\frac{1}{3}} q + 1$$

Protože se jedná o regulátor PD a stupeň charakteristického polynomu je roven třem, vybereme z tabulky 8.3 odpovídající řádek s koeficienty standardního bezrozměrného tvaru charakteristického polynomu. Srovnáním koeficientů získáme

$$\frac{3.8}{K_0} \left(\frac{K_0}{2.4}\right)^{\frac{2}{3}} = 5.1 \quad \frac{1 + K_0T}{K_0} \left(\frac{K_0}{2.4}\right)^{\frac{1}{3}} = 6.3$$

odkud plyne

$$K_0 = 0.072 \quad \rightarrow \quad K_R = \frac{K_0}{0.1} = 0.72 \quad \text{a} \quad T = 6.36$$

Navržený regulátor má přenos

$$F_R(p) = 0.72(6.36p + 1)$$

Všimněme si, že PD regulátor navržený metodou standardních tvarů charakteristického polynomu dává ve srovnání s ostatními probranými metodami srovnatelnou hodnotu derivační časové konstanty, avšak velmi nízkou hodnotu proporcionálního zesílení. Systémy navržené metodou standardních tvarů charakteristického polynomu podle tabulky 8.3 vykazují silně tlumené a pomalé odezvy.

## 8.7 Shrnutí

V této kapitole jsme se věnovali metodám návrhu regulátorů. Zhodnocení jednotlivých metod je provedeno buďto přímo v dané podkapitole nebo na jejím konci v samostatné podkapitole. Mohli bychom namítnout, proč se zabýváme návrhovými metodami spojitých regulátorů, když jsme si v úvodu učebního textu řekli, že stejně většina dnes navržených regulátorů pracuje v nějakém řídicím počítači, čili diskrétně. Je to z toho důvodu, že návrh spojitých regulátorů je dostatečně dobře propracován. Jednou z možností jak navrhnout diskrétní regulátor je navrhnout spojitý regulátor na soustavu s dopravním zpožděním o hodnotě poloviny periody vzorkování a tento regulátor převést na diskrétní ekvivalent. Tento postup bude ukázán v kapitole 10 (podkapitola 10.4.3)

## 8.8 Kontrolní otázky

**Otázka 8.1** *Vysvětlete metodu standardních tvarů frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu.*

**Otázka 8.2** *Kdy se nehodí použít metodu inverzního regulátoru a proč?*

**Otázka 8.3** *Proč je v praxi oblíbená metoda Ziegler-Nicholse pro návrh regulátoru. Jaké znáte způsoby jejího použití?*

## 9 Rozvětvené regulační obvody

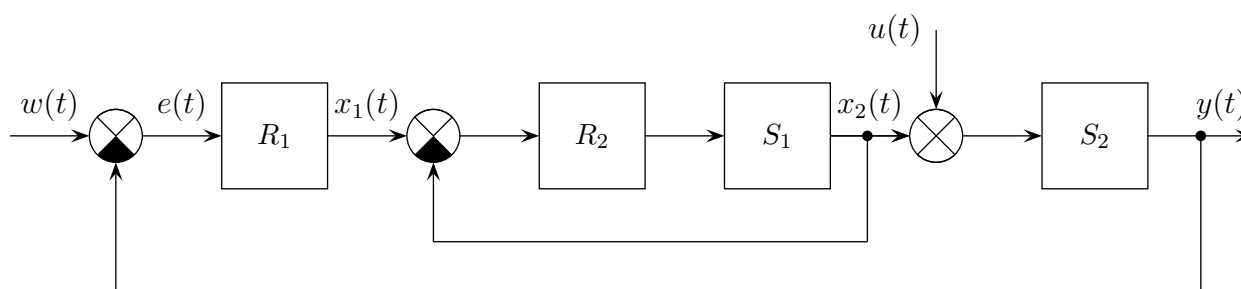
Regulační obvody, které jsme dosud probírali, byly tvořeny soustavou a regulátorem v jedné zpětnovazební smyčce. Takové obvody nazýváme jednoduché. Jsou-li na kvalitu regulace kladeny vyšší požadavky, případně je-li požadováno optimální uspořádání regulačního obvodu, nestačí už tato jednoduchá struktura a musíme použít další regulační vazby. Vznikne tak systém s větším počtem vazeb mezi jednotlivými členy obvodu. Takové obvody nazýváme rozvětvené. Ke zlepšení kvality regulace používáme různé pomocné veličiny a podle toho rozeznáváme tyto hlavní typy rozvětvených regulačních obvodů.

1. obvody s pomocnou regulovanou veličinou
2. obvody s pomocnou akční veličinou
3. obvody s měřením poruchy
4. obvody s modelem regulované soustavy

Vlastnosti jednotlivých typů ukážeme na vybraných příkladech.

### 9.1 Regulační obvody s pomocnou regulovanou veličinou

Blokové schéma tohoto typu regulačního obvodu je na obrázku 9.1. V regulované soustavě



**Obrázek 9.1:** Schéma regulačního obvodu s pomocnou regulovanou veličinou

tvořené sériovým spojením bloků  $S_1$  a  $S_2$  je měřena veličina  $x_2(t)$ , která je regulátorem  $R_2$  řízena podle žádané hodnoty  $x_1(t)$  (hlavní akční veličina). Jako hlavní regulátor pracuje blok  $R_1$ . Přenos řízení tohoto rozvětveného obvodu je

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{R_1(p)R_2(p)S_1(p)S_2(p)}{1 + R_2(p)S_1(p) + R_1(p)R_2(p)S_1(p)S_2(p)} \quad (9.1)$$

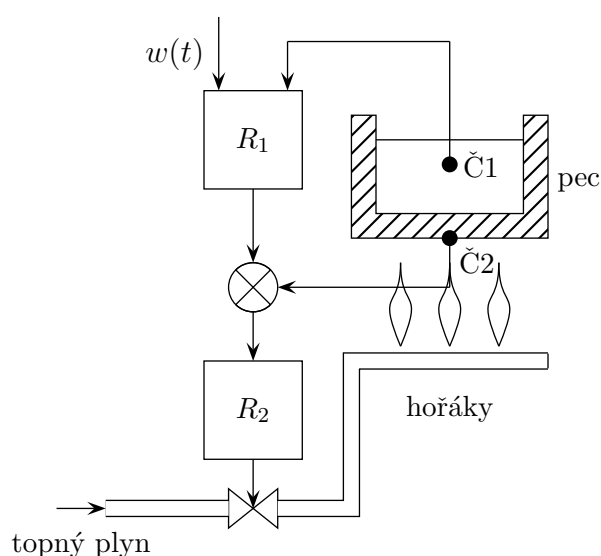
a přenos poruchy

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{S_2(p)[1 + S_1(p)R_2(p)]}{1 + R_2(p)S_1(p) + R_1(p)R_2(p)S_1(p)S_2(p)} \quad (9.2)$$



Z těchto rovnic je vidět vliv zavedené pomocné zpětné vazby na tvar charakteristického polynomu. Již v kapitole o regulátorech jsme poznali jeden typ tohoto obvodu. Je-li akčním orgánem servomotor s polohovým výstupem, zavádíme zpětnou vazbu od polohy a změním tak přenos tohoto akčního členu. Protože se jedná o pevnou zpětnou vazbu (bez derivačního členu), změní se původně astatický akční člen na článek statický. Zařadíme-li jako hlavní regulátor některý typ s integrační složkou (I, PI, nebo PID), není v systému astatismus 2. řádu a systém je méně náchylný k nestabilitě.

Pomocná regulovaná veličina se často používá při regulaci teploty a v polohových servomechanismech. Při regulaci teploty je soustava obvykle tvořena větším počtem setrvačných článků spojených sériově. Zavedením pomocné regulované veličiny měřené v blízkosti vstupu do soustavy, získáme možnost rychlejší reakce na vznik poruchy, a tím její lepší potlačení.

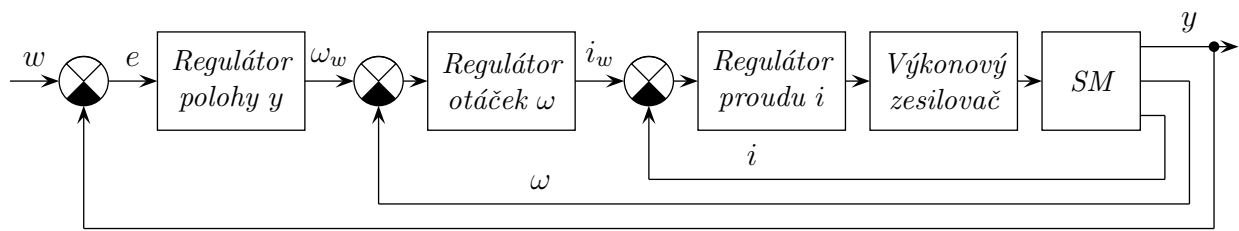


**Obrázek 9.2:** Řízení teploty v obvodu s pomocnou regulovanou veličinou

Na obrázku 9.2 je nakreslen rozvětvený regulační obvod, ve kterém je jako pomocná regulovaná veličina zavedena teplota pláště pece vyhřívané hořáky. Změní-li se výhřevnost nebo tlak topného plynu, projeví se tato změna rychleji na teplotě pláště, než na teplotě látky v peci. Reakce regulátoru  $R_2$  je proto mnohem rychlejší než regulátoru  $R_1$  a vliv poruchy je rychleji kompenzován.

Při konstrukci servomechanismů (regulátorů polohy) a regulátorů otáček se taktéž uplatňují pomocné regulované veličiny. Servomechanismus s rozvětvenou strukturou je blokově nakreslen na obrázku 9.3.

U větších servomechanismů se kromě hlavní regulace polohy výstupního hřídele zavádí i regulace otáček  $\omega$  a regulace proudu  $i$ . Žádané hodnoty těchto podřízených regulací zadávají vždy nadřazené regulátory. Seřízení podřízených regulátorů se obvykle volí tak, aby dynamické vlastnosti uzavřených malých smyček odpovídaly statickým soustavám na mezi aperiodicity.



**Obrázek 9.3:** Schéma rozvětvené struktury servomechanismu

Jednoduchý způsob návrhu je opakované použití metody Ziegler-Nicholse. Prvně se nastaví vnitřní smyčka a potom vnější smyčka. Pokud je nutné další přenastavení vnitřní smyčky, tak se dá provést s uzavřenou vnější smyčkou.

**Příklad 9.1** Navrhněte regulátor polohy s pomocnou řídicí veličinou  $u$  stejnosměrného motoru s cizím buzením s připojenou zátěží. Pomocnou regulovanou veličinou bude úhlová rychlost. Známe odpor statoru motoru  $R_a = 5[\Omega]$ . Dále víme, že elektrická časová konstanta je zanedbatelná (nepotřebujeme znát indukčnost statoru  $L_a$ ) a že buzení je konstantní a známe konstantu  $k_b = c\Phi = 2[V \cdot s/rad]$ . Zátěž je dána momentem setrvačnosti  $J = 1[kg \cdot m^2]$ , tlumením  $B = 2[N \cdot m \cdot s/rad]$  a konstantou pružiny  $K = 0.5[N \cdot m/rad]$ .

Proud motorem se určí podle vzorce

$$i_a = \frac{u - u_i}{R_a}$$

kde  $i_a$  je proud statoru,  $u$  je vstupní napětí a  $u_i = k_b \frac{d\varphi}{dt}$  je zpětné indukované napětí motoru. Moment motoru je

$$M = k_b i_a$$

Moment zátěže je

$$M_z = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + K\varphi$$

Nyní odvodíme přenos motoru

$$\begin{aligned} J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + K\varphi &= k_b \frac{u - k_b \frac{d\varphi}{dt}}{R_a} \\ J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(B + \frac{k_b^2}{R_a}\right) \frac{d\varphi}{dt} + K\varphi &= \frac{k_b u}{R_a} \\ S(p) = \frac{\varphi(p)}{U(p)} &= \frac{\frac{k_b}{R_a J}}{p^2 + \left(\frac{k_b^2}{R_a J} + \frac{B}{J}\right)p + \frac{K}{J}} \end{aligned}$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$S(p) = \frac{0.4}{p^2 + 2.8p + 0.5}$$

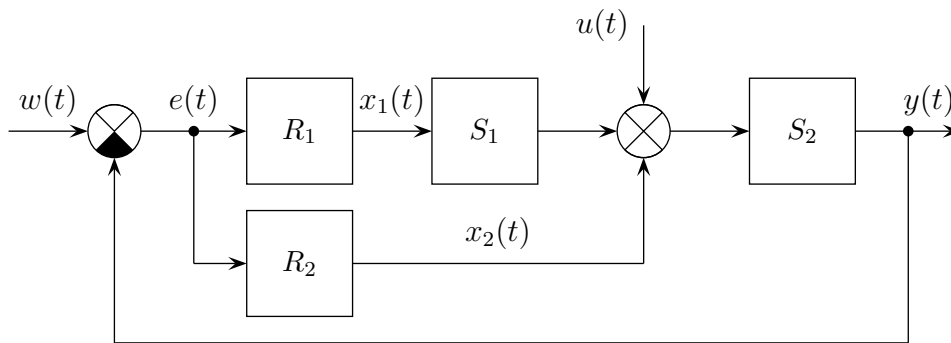
K tomu, abychom použili regulátor s pomocnou regulovanou veličinou, rozdělíme si soustavu na dvě části

$$S(p) = S_1(p) \cdot S_2(p) = \frac{0.4p}{p^2 + 2.8p + 0.5} \cdot \frac{1}{p}$$

Nejprve navrhne regulátor na soustavu  $S_1(p) = \frac{0.4p}{(p+2.608)(p+0.192)}$ .

## 9.2 Regulační obvody s pomocnou akční veličinou

Podmínkou pro zavedení této pomocné vazby je možnost působit na soustavu nejméně dvěma akčními veličinami. Přitom řád přenosu akčních veličin na výstup má být různý, nebo se alespoň musí lišit velikost časových konstant obou přenosů. To je nutné s ohledem na to, že zásahy na jedné akční veličině se musí rychleji přenášet na regulovanou veličinu než změny druhé akční veličiny.



**Obrázek 9.4:** Schéma regulačního obvodu s pomocnou akční veličinou

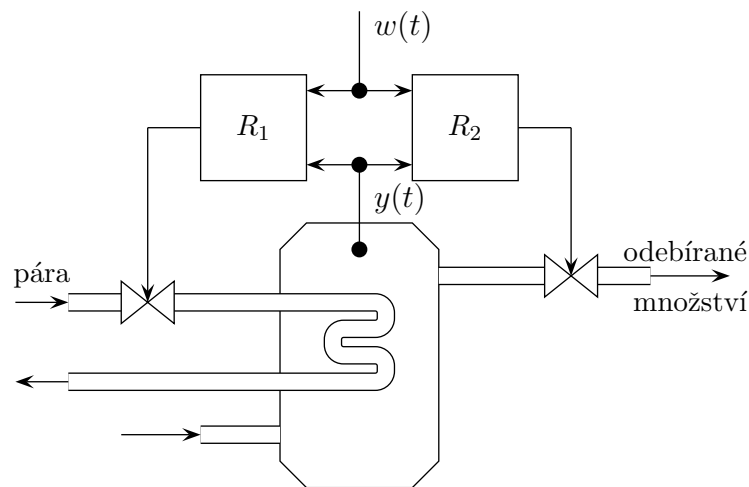
Na obrázku 9.4 je nakresleno blokové schéma rozvětveného regulačního obvodu s pomocnou akční veličinou. Soustavu tvoří dva sériově zapojené bloky  $S_1$  a  $S_2$ . Hlavní regulátor  $R_1$  působí na soustavu akční veličinou  $x_1$ , kdežto pomocný regulátor  $R_2$  ovládá pomocnou akční veličinou  $x_2$ . Změny této pomocné akční veličiny se přenášejí na výstup soustavy  $y$  rychleji, než změny hlavní akční veličiny  $x_1$ . Pro přenos řízení platí

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{[R_1(p)S_1(p) + R_2(p)]S_2(p)}{1 + R_2(p)S_2(p) + R_1(p)S_1(p)S_2(p)} \quad (9.3)$$

a pro přenos poruchy působící na vstupu druhé části soustavy

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{S_2(p)}{1 + R_2(p)S_2(p) + R_1(p)S_1(p)S_2(p)} \quad (9.4)$$

Porovnáním s rovnicemi (9.1) a (9.2) popisujícími přenosy rozvětveného obvodu s pomocnou regulovanou veličinou vidíme, že obě pomocné vazby ovlivňují stability systému. Zavedením pomocné regulované veličiny se výrazněji zlepšuje kompenzace poruch - tedy přenos poruchy, zatímco pomocnou akční veličinou se zlepší více přenos řízení než přenos poruchy.



**Obrázek 9.5:** Řízení teploty v obvodu s pomocnou akční veličinou

Praktické zavedení pomocné akční veličiny ukazuje obrázek 9.5. Regulovanou veličinou je teplota vody ve výměníku vyhříváném protékající parou. Jako hlavní akční veličina působí množství protékající páry, jako pomocná veličina množství odebírané vody. Změnou průtoku páry způsobíme změnu teploty látky ve výměníku s daleko větším zpožděním, než změnou množství odebírané látky. Tuto pomocnou akční veličinu však nelze použít jako jedinou, neboť odebírané množství je dáno potřebami uživatele a jeho vnucené změny nejsou z hlediska celého procesu vhodné.

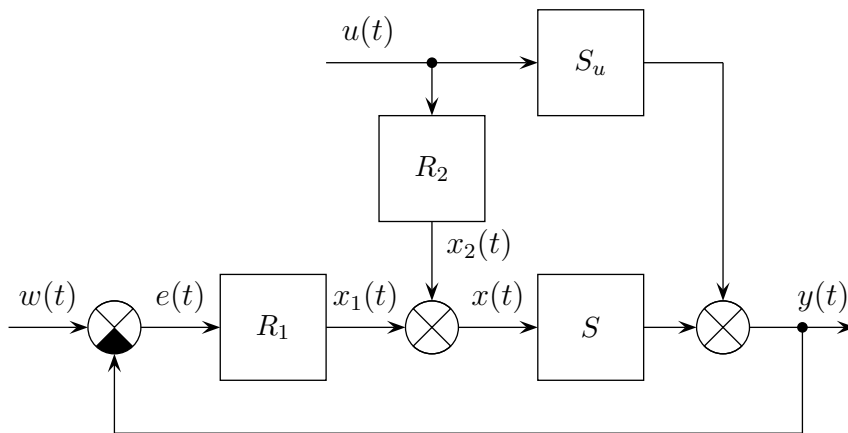
Hlavní regulátory se v těchto rozvětvených obvodech volí typu I nebo PI, aby byly zajištěny co nejmenší ustálené odchylky. Pomocné regulátory jsou většinou typu PD s ohledem na co nejrychlejší průběh přechodného děje v pomocné regulační smyčce. Velmi často se tento typ rozvětveného regulačního obvodu používá v regulaci destilačních chemických procesů. Akčními veličinami destilační kolony jsou teplota páry kolony a reflux vedený z hlavy kolony. Řízení refluxu je podstatně rychlejší než řízení teploty a umožňuje tak dosáhnout vysokou kvalitu regulace čistoty produktů.

### 9.3 Regulační obvody s měřením poruchy

Blokové schéma tohoto typu rozvětveného regulačního obvodu je na obrázku 9.6. Porucha  $u(t)$  prochází článkem s přenosem  $S_u(p)$  a přičítá se k výstupu regulované soustavy. Současně tuto poruchu měříme a přes regulátor  $R_2$  přičítáme k akční veličině  $x_1(t)$ . Přenos řízení zůstává touto přídavnou vazbou nezměněn. Přenos poruchy je ve tvaru

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{S_u(p) + R_2(p)S(p)}{1 + R_1(p)S(p)} \quad (9.5)$$

Z tohoto vzorce je patrné, že přenos poruchy je možné regulátorem  $R_2$  výrazně měnit. Teoreticky lze dosáhnout úplné kompenzace poruchového signálu, čili tzv. *invariantnosti*



**Obrázek 9.6:** Schéma regulačního obvodu s měřením poruchy

systemu vůči poruše  $u(t)$ . Tento stav nastane, je-li splněna podmínka

$$S_u(p) + R_2(p)S(p) = 0$$

odkud

$$R_2(p) = -\frac{S_u(p)}{S(p)}$$

Praktická realizovatelnost této podmínky je ovšem omezena na případy, kdy je přenos  $S_u(p)$  vyššího nebo alespoň stejného řádu jako přenos  $S(p)$ . Tato podmínka je ovšem splněna velmi zřídka, spíše je tomu naopak. Pak ovšem vychází přenos regulátoru, který má v čitateli polynom vyššího řádu, než je polynom jmenovatele, což je nereálné. Pokud se řády přenosů  $S_u(p)$  a  $S(p)$  liší pouze o jedničku, lze dosáhnout přibližné invariantnosti pomocí reálného PD regulátoru  $R_2$ . Na stabilitu samotného regulačního obvodu nemá pomocná vazba od poruchy vliv.

**Příklad 9.2** Přenos regulované soustavy je

$$S(p) = \frac{1}{(10p + 1)(p + 1)}$$

a přenos poruchy na výstup je

$$S_u(p) = \frac{3}{10p + 1}$$

Navrhněte pomocný regulátor  $R_2(p)$  kompenzující poruchu, pokud je porucha měřitelná.

Úplnou invariantnost vůči poruše by zřejmě zajistil pomocný regulátor s přenosem

$$R_2(p) = -\frac{S_u(p)}{S(p)} = -3(p + 1)$$

Použijeme reálný PD regulátor s přenosem

$$R_2(p) = \frac{-3(p+1)}{0.01p+1}$$

a pokud bude hlavní regulátor typu P s přenosem

$$R_1(p) = 5$$

pak bude přenos poruchy

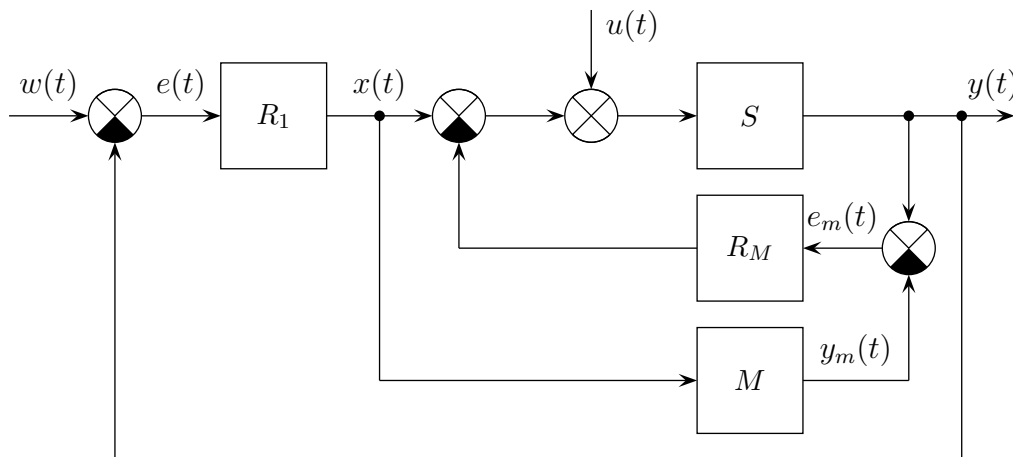
$$F_u(p) = \frac{0.03p(p+1)}{(10p^2 + 11p + 6)(0.01p + 1)}$$

V ustáleném stavu je porucha plně kompenzována. V průběhu přechodného děje je její vliv velmi podstatně snížen.

Systémy s měřením poruchy jsou často realizovány u regulací teploty velkých objemů. Například vytápění budov lze výrazně zlepšit měřením venkovní teploty, jejíž změny jsou hlavní poruchou. Podobně měření napájecího napětí, teploty a tlaku vyhřívacího média nebo kvality topného materiálu obvykle zvýší kvalitu regulace.

## 9.4 Regulační obvody s modelem regulované soustavy

Systémy s modelem regulované soustavy se používají hlavně v adaptivních obvodech, mohou však zlepšit i kvalitu regulace v jednoduchém regulačním obvodu.



**Obrázek 9.7:** Schéma regulačního obvodu s modelem regulované soustavy

Blokové schéma rozvětveného obvodu je na obrázku 9.7. Akční veličina  $x(t)$  působí jak na regulovanou soustavu  $S(p)$ , tak na model  $M(p)$ . Rozdíl výstupů  $y(t) - y_M(t)$  tvoří pomocnou odchylku  $e_M(t)$ , kterou zpracovává regulátor  $R_M(p)$ .

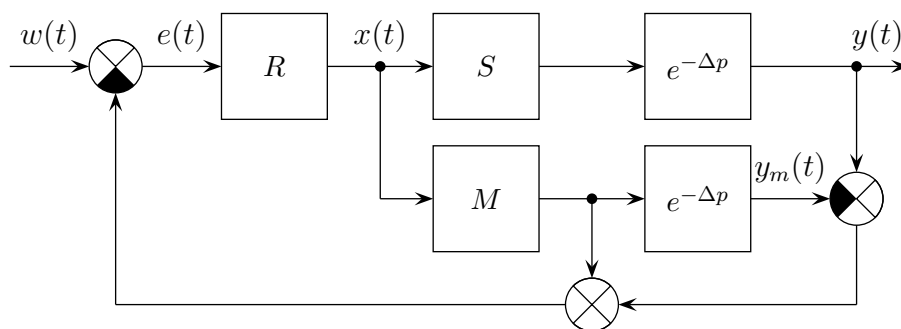
Přenos řízení je

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{R_1(p)S(p) + R_1(p)S(p)R_M(p)M(p)}{1 + R_1(p)S(p) + S(p)R_M(p) + S(p)R_1(p)M(p)R_M(p)} \quad (9.6)$$

a přenos poruchy

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{S(p)}{1 + R_1(p)S(p) + S(p)R_M(p) + S(p)R_1(p)M(p)R_M(p)} \quad (9.7)$$

Hlavním přínosem zavedení této pomocné vazby je značná necitlivost kvality regulace na změny parametrů regulované soustavy. Tuto vlastnost zabezpečuje regulátor  $R_M(p)$ , který vyrovnává rozdíly mezi soustavou a jejím modelem.



**Obrázek 9.8:** Schéma regulačního obvodu kompenzujícího dopravní zpoždění

Speciálním případem rozvětveného obvodu s modelem regulované soustavy je obvod kompenzující přítomnost dopravního zpoždění v regulované soustavě. Jeho blokové schéma je na obrázku 9.8. Předpokládáme, že součástí soustavy je článek s dopravním zpožděním o velikosti  $\Delta$ . Model obsahuje stejný článek, mimo to je však k dispozici nezpožděný výstup modelu. Přenos řízení tohoto rozvětveného obvodu je

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{R(p)S(p)e^{-\Delta p}}{1 + R(p)S(p)} \quad (9.8)$$

V charakteristickém polynomu se nevyskytuje člen s dopravním zpožděním, což přispívá ke stabilitě systému. Praktická realizace modelu a dopravního zpoždění ve spojitě variantě by byla velmi nákladná, proto se při realizaci používá diskrétní model ve struktuře s diskrétním regulátorem.

## 9.5 Shrnutí

V této kapitole jsme se seznámili s možnými blokovými schémata pro zlepšení vlastností jednoduchých regulátorů. Používají se tam, kde kvalita jednoduchých regulátorů nedostačuje. V závislosti na tom, co nám na regulačním ději vadí se můžeme rozhodnout pro některý typ regulačního obvodu, který jsme probrali v této kapitole, případně pro jejich kombinaci.

## 9.6 Kontrolní otázky

**Otázka 9.1** *Proč se používají rozvětvené regulační obvody?*

**Otázka 9.2** *Jaké typy rozvětvených regulačních obvodů znáte?*

**Otázka 9.3** *Nakreslete jednotlivá schémata rozvětvených regulačních obvodů, určete přenosy řízení a poruchy, popište jejich hlavní výhody a uveďte příklady jejich použití.*

**Otázka 9.4** *Jakým způsobem lze dosáhnout úplnou invariantnost regulačního obvodu na poruše? Diskutujte možnost jejího dosažení.*

**Otázka 9.5** *Nakreslete blokové schéma rozvětveného regulačního obvodu, ve kterém lze kompenzovat negativní vliv dopravního zpoždění v regulované soustavě.*



## 10 Syntéza regulačních obvodů se vzorkováním

Většina dnes navrhovaných řídicích algoritmů běží na číslicovém řídicím počítači. Algoritmus řízení v něm neběží spojitě, ale je spouštěn v diskrétních časových okamžicích, které jsou od sebe časově posunuty o periodu vzorkování. Systémům, které jsou řízeny takovýmto regulátorem říkáme systémy se vzorkováním. Kromě toho zde dochází také ke kvantování signálu v amplitudě. Analogově-číslcový převodník převádí původně analogový signál na diskretizovaný signál, který nabývá konečného počtu úrovní. Jev kvantování můžeme v dnešní době zanedbat, neboť se používají převodníky s rozlišením 12 bitů, 16 bitů i více, které poskytují dostatečně přesné přiblížení se ke skutečné hodnotě. Pokud se v obvodu vyskytuje jeden člen který pracuje diskrétně, musíme celý obvod řešit pomocí  $z$ -transformace (respektive modifikované  $m$ -transformace). Ta předpokládá, že všechny vzorkovače pracují synchronně. V této kapitole budeme proto předpokládat, že doba výpočtu algoritmu je nulová. V praxi se spokojíme s tím, že je zanedbatelná ve srovnání s periodou vzorkování. Pokud tomu tak není, můžeme tuto dobu zahrnout do zpoždění soustavy a regulátor potom navrhnout na soustavu s tímto zpožděním.

Realizace číslicového řízení počítačem s sebou přináší možnost měnit jednotlivé algoritmy řízení podle provozních podmínek, doplnění lineárních algoritmů nelineárními logickými podmínkami a konečně snadnou možnost realizace řídicích algoritmů vyšších typů (extremální, adaptivní, apod.).

V první části této kapitoly se seznámíme s návrhem číslicových korekčních členů, které se navrhuje na základě požadavků na tvar přenosu řízení. Požadovaný přenos řízení se nemůže zvolit libovolně. Musíme při tom dodržet jistá pravidla, jinak by nám mohl vyjít nerealizovatelný regulátor. Použitím číslicových korekčních členů lze dosáhnout konečného regulačního děje, což u spojitých regulátorů dosáhnout nemůžeme. Regulační děj může být konečný pouze v okamžicích vzorkování (slabší varianta), nebo i mezi okamžiky vzorkování (silnější varianta) Silnější varianta nás bude zajímat více. V druhé části si ukážeme, jak se dá navrhnout číslicový korekční člen pokud jsou zadány požadavky na vyregulování poruchy a požadovaný tvar přenosu poruchy. Ve třetí části se zaměříme na regulační obvod se dvěma stupni volnosti, který navrhneme s ohledem na současně splnění požadavků na přenos řízení a přenos poruchy. Ve čtvrté části se zaměříme na návrh jednoduchých typů diskrétních regulátorů  $P$ ,  $PS$ ,  $PD$  a  $PSD$ , které jsou obdobou jejich spojitých verzí.

### 10.1 Návrh řídicího algoritmu podle požadovaných vlastností přenosu řízení

Předpokládejme, že regulační obvod má blokové schéma podle obrázku 4.7. Přenosovou funkci tvarovače a soustavy označíme  $F_C(z)$ , takže pro tvarovač nultého řádu platí

$$F_C(z) = \text{ekv} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} F_S(p) \right\} \quad (10.1)$$

Přenosová funkce uzavřeného obvodu pro řízení je

$$F_w(z) = \frac{D(z)F_C(z)}{1 + D(z)F_C(z)}$$

Stanovíme-li na základě daných požadavků konkrétní tvar této funkce, můžeme úpravou uvedeného vztahu vyčíslit přenos řídicího počítače

$$D(z) = \frac{1}{F_C(z)} \frac{F_w(z)}{1 - F_w(z)} \quad (10.2)$$

V následujících odstavcích této kapitoly ukážeme, jak se jednotlivé požadavky na statické i dynamické vlastnosti regulátoru promítnou do tvaru požadované přenosové funkce  $F_w(z)$ .

### 10.1.1 Fyzikální realizovatelnost řídicího členu

Přenos spojitě části obvodu (tvarovače a soustavy) je dán poměrem dvou polynomů  $P(z)$  a  $Q(z)$ , přičemž  $Q(z)$  je o  $m$  vyššího řádu než polynom  $P(z)$

$$F_C(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = g_m z^{-m} + g_{m+1} z^{-(m+1)} + \dots$$

V důsledku toho se akční zásah přivedený v čase  $t = 0$  může na výstupu soustavy projevit až za  $m$  period. Říkáme, že regulovaná soustava způsobuje zpoždění procházejícího signálu o  $m$  period.

Přenosovou funkci řízení můžeme také zapsat ve tvaru mocninné řady

$$F_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = f_n z^{-n} + f_{n+1} z^{-(n+1)} + \dots$$

Řídicí člen  $D(z)$  je realizovatelný pouze tehdy, platí-li  $m \leq n$ . Tato podmínka vyplývá přímo z rovnice (10.2). Dosadíme-li jednotlivé přenosy v rozvedeném tvaru.

$$D(z) = \frac{1}{g_m z^{-m} + g_{m+1} z^{-(m+1)} + \dots} (h_n z^{-n} + h_{n+1} z^{-(n+1)} + \dots)$$

Není-li  $m \leq n$ , má nejméně jeden člen na pravé straně této rovnice kladný exponent u proměnné  $z$ , a to znamená, že výstupní veličina číslicového regulátoru musí předcházet veličinu vstupní, což není fyzikálně realizovatelné.

Pokud regulovaná soustava neobsahuje článek s dopravním zpožděním  $T_d$  rovným nebo větším než je perioda vzorkování  $T$ , je  $m = 1$ . Soustava způsobuje zpoždění signálu o jednu periodu. Nebrání-li tomu jiné důvody, může v takovém případě mít přenosová funkce řízení tvar

$$F_w(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$$

### 10.1.2 Regulace na nulovou ustálenou odchylku

K vyjádření podmínky pro  $F_w(z)$  (žádáme-li nulovou ustálenou odchylku v ustáleném stavu) použijeme větu o konečné hodnotě vzorkované funkce. Pro obvod z obrázku 4.7 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) [W(z) - Y(z)] = 0$$

Dosadíme  $Y(z) = F_w(z)W(z)$  a dostaneme

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})W(z)[1 - F_w(z)] = 0$$

Pro jednotlivé typy řídicího signálu  $w(t)$  musí  $F_w(z)$  splňovat tyto podmínky:  
pro  $w = konst.$ , t.j.

$$W(z) = \frac{Az}{z - 1}$$

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})G(z)$$

kde  $G(z)$  je libovolná racionální funkce lomená (ovšem bez pólů  $z_k = 1$ )  
pro  $w = t$ , t.j.

$$W(z) = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$$

pro  $w = t^2$ , t.j.

$$W(z) = \frac{T^2 z(z + 1)}{(z - 1)^3}$$

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^3 G(z)$$

Tyto podmínky lze obecně formulovat větou: Trvalá regulační odchylka při řídicím signálu  $k$ -tého řádu je nulová tehdy, vyhovuje-li přenosová funkce řízení rovnici

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^{k+1} G(z)$$

Pokud nemáme na přenos řízení další požadavky, můžeme volit  $G(z) = 1$ . Pak dostaneme tzv. minimální tvary přenosových funkcí. Podle typu vstupního signálu  $w(t)$  platí:

$$\text{při } w(t) = w_0 \quad F_w(z) = z^{-1}$$

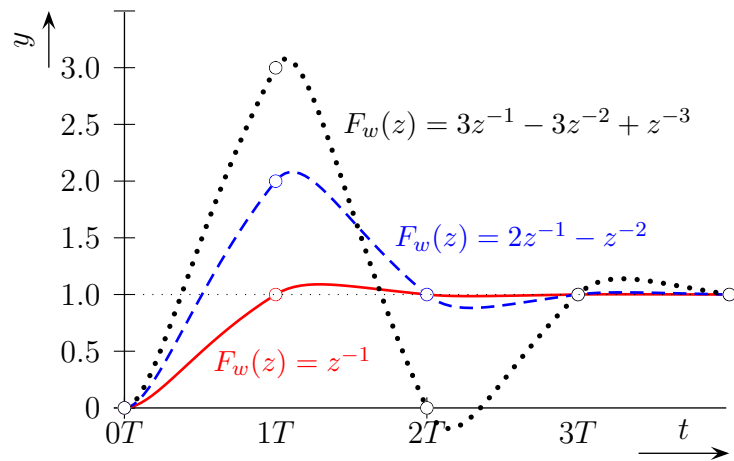
$$\text{při } w(t) = at \quad F_w(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$\text{při } w(t) = bt^2 \quad F_w(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

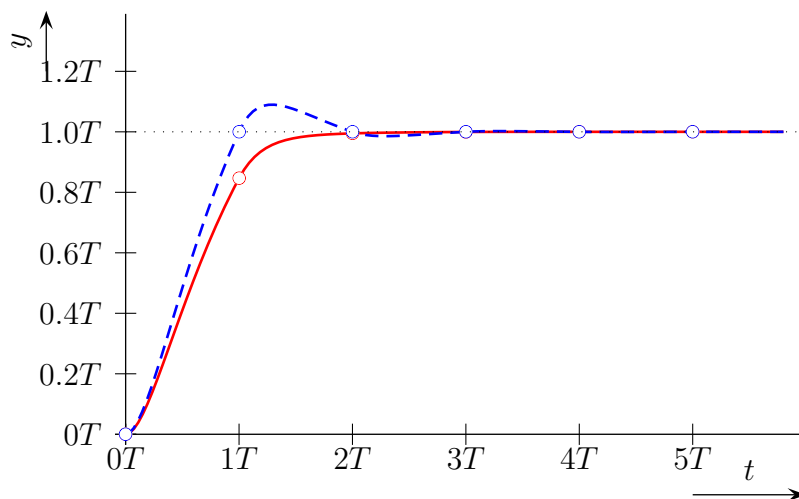
Odezvy obvodů s těmito přenosovými funkcemi na skok řídicího signálu jsou nakresleny na obrázku 10.1. Plná křivka platí pro obvod navržený na konstantní řídicí veličinu, čárkovaná křivka platí pro obvod navržený na lineárně narůstající signál a tečkovaná křivka platí pro obvod navržený na vstupní signál o konstantním zrychlení.

### 10.1.3 Konečná doba trvání přechodného děje

Zde je třeba rozlišovat dva případy. Požadavek, aby přechodný děj byl konečný pouze pokud se týká okamžiků vzorkování (průběh nakreslený na obrázku 10.2 čárkovaně) a požadavek rozšířený i na průběh mezi časy  $t_n = nT$  (plná křivka v obrázku 10.2). První podmínku lze formulovat tak, že difference dvou po sobě následujících hodnot  $y(nt)$  a  $y[(n + 1)T]$  musí být od určitého  $k$  nulové. V druhém případě musí tomuto požadavku



**Obrázek 10.1:** Odezvy na skokovou změnu žádané hodnoty pro obvody navržené na různé průběhy řídicí veličiny (konstantní, lineárně narůstající a s konstantním zrychlením)



**Obrázek 10.2:** Konečný přechodný děj v a mezi okamžiky vzorkování

vyhovovat i diference hodnot  $y[(n+m)T]$  a  $y[(n+1+m)T]$  pro  $0 \leq m \leq 1$ . Při řídicím signálu typu jednotkového skoku platí pro amplitudy výstupní veličiny  $y(nT)$  rovnice

$$y(nT) = \sum_{i=0}^n f_i$$

kde koeficienty  $f_i$  určíme z rozvoje přenosové funkce řízení

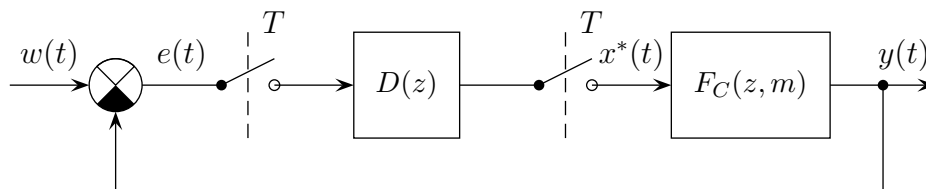
$$F_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$$

Má-li být splněna dříve uvedená podmínka týkající se diferencí, musí od času  $t_k = kT$  platit

$$y[(k+j)T] = y(kT) \quad \text{pro } j = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

To ovšem znamená, že platí  $y[(k+j)T] = 0$  a tedy rozvoj přenosové funkce  $F_w(z)$  musí mít konečný počet členů. Podmínku konečné doby trvání přechodného děje formuluje věta:

Přechodný děj v regulačním obvodu je při změně řídicí veličiny konečný (v okamžicích vzorkování), jestliže přenosová funkce řízení je vyjádřitelná polynomem o konečném počtu členů. Přechodný děj je konečný i v časech mimo okamžiky vzorkování, jestliže i  $F_w(z, m)$  má konečný počet členů pro všechna  $m$  z intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ . Tuto podmínku lze splnit pouze tehdy, obsahuje-li funkce  $F_w(z, m)$  celý číselový polynom přenosu spojitě pracující části obvodu  $P(z, m)$ .



**Obrázek 10.3:** Regulační obvod s diskretním regulátorem

Má-li obvod blokové schéma podle obrázku 10.3 a jednotlivé přenosy jsou definovány vztahy  $D(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ ,  $F_C(z) = \frac{P(z, m)}{Q(z)}$ , pak pro přenos řízení platí

$$F_w(z, m) = \frac{D(z)F_C(z, m)}{1 + D(z)F_C(z)} = \frac{A(z)P(z, m)}{B(z)Q(z) + A(z)P(z)}$$

Volitelné jsou polynomy přenosu číslicového regulátoru  $A(z)$  a  $B(z)$ , přenos  $F_w(z)$  však musí obsahovat polynom  $P(z)$ .

Podobným způsobem lze dokázat, že akční veličina  $x(nT)$  bude od určitého času  $kT$  konstantní (konečný počet kroků regulace) pouze tehdy, bude-li splněna širší podmínka konečného přechodného děje.

### 10.1.4 Stabilita obvodu se soustavou, jejíž diskrétní přenos obsahuje nuly a póly mimo jednotkovou kružnici v rovině

Přenosová funkce řízení  $F_w(z)$  musí v tomto případě vyhovovat dalším požadavkům. Předpokládejme, že přenos  $F_C(z)$  lze psát ve tvaru

$$F_C(z) = \frac{z+a}{z+b} Q_C(z)$$

kde  $|a| \geq 1$  i  $|b| \geq 1$  a zbytková funkce  $Q_C(z)$  již má všechny nuly i póly uvnitř jednotkové kružnice. Pro jednoduchost jsme zvolili příklad, kde pouze jedna nula  $-a$  a jeden pól  $-b$  leží vně jednotkové kružnice. Pro přenos řízení platí

$$F_w(z) = \frac{D(z)F_C(z)}{1 + D(z)F_C(z)} = \frac{A(z)(z+a)Q_C(z)}{B(z)(z+b) + A(z)(z+a)Q_C(z)}$$

Požadujeme, aby tato funkce měla určitý žádaný tvar  $F_{wk}(z)$ , takže pro přenos regulátoru platí

$$D(z) = \frac{1}{F_C(z)} \frac{F_{wk}(z)}{1 - F_{wk}(z)} = \frac{z+b}{z+a} \frac{1}{Q_C(z)} \frac{F_{wk}(z)}{1 - F_{wk}(z)}$$

Pokud matematický model soustavy, reprezentovaný přenosem  $F_C(z)$ , zcela přesně odpovídá skutečnosti, budou nuly i póly přenosu soustavy kompenzovány póly a nulami přenosu regulátoru a skutečný přenos řízení bude roven požadovanému. Tento stav však v praxi nebude nikdy dosažen, neboť každý přenos je pouze více či méně dokonalou aproximací skutečných vlastností soustavy. Nechtě skutečné hodnoty nuly a pólu, ležících vně jednotkové kružnice, jsou  $\bar{a} = a + \Delta a$  a  $\bar{b} = b + \Delta b$ . Přenos řízení uzavřeného obvodu pak je

$$F_w(z) = \frac{\frac{z+b}{z+a} \frac{1}{Q_C(z)} \frac{F_{wk}(z)}{1 - F_{wk}(z)} \frac{z+\bar{a}}{z+\bar{b}} Q_C(z)}{1 + \text{čitatel}} = \frac{(z+b)(z+\bar{a})F_{wk}(z)}{(z+a)(z+\bar{b})[1 - F_{wk}(z)] + (z+b)(z+\bar{a})F_{wk}(z)}$$

V tomto případě ke kompenzaci nedojde, vzniknou zde dipólové členy, které způsobí nestabilitu celého obvodu.

Stabilita bude zachována pouze tehdy, bude-li žádaná přenosová funkce řízení vyhovovat podmínkám

$$\begin{aligned} F_{wk}(z) &= (z+a)M(z) \\ 1 - F_{wk}(z) &= (z+b)N(z) \end{aligned} \tag{10.3}$$

kde  $M(z)$  a  $N(z)$  jsou volitelné polynomy. Pro přenos regulátoru platí

$$D(z) = \frac{(z+b)}{(z+a)} \frac{1}{Q_C(z)} \frac{(z+a)M(z)}{(z+b)N(z)} = \frac{M(z)}{N(z)Q_C(z)}$$

a pro skutečný přenos řízení

$$F_w(z) = \frac{(z+\bar{a})M(z)}{(z+\bar{b})N(z) + (z+\bar{a})M(z)} = \frac{F_{wk}(z) + \delta(z)}{1 + \varepsilon(z)}$$

Pokud se předpokládané i skutečné hodnoty nul i pólu liší jen o malé hodnoty, jsou i koeficienty v polynomech  $\delta(z)$  a  $\varepsilon(z)$  malé a skutečný přenos řízení se bude málo lišit od žádaného přenosu. Následující příklady slouží pro ilustraci odvozených závislostí.

**Příklad 10.1** *Regulovaná soustava má spojitý přenos*

$$F_S(p) = \frac{1}{p(20p + 1)^2}$$

*Tvarovací člen je nultého řádu a perioda vzorkování je  $T = 10$ s. Navrhněte diskrétní regulátor, který zajistí nulovou ustálenou odchylku při konstantním řízení.*

Diskrétní přenos celého zapojení je

$$F_C(z) = \text{ekv} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p^2(20p + 1)^2} \right\} = 0.32653z^{-1} \frac{(1 + 2.928z^{-1})(1 + 0.2072z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})^2}$$

Požadujeme, aby ustálená odchylka při konstantním řízení byla rovna nule. Z toho vyplývá podmínka

$$1 - F_{wk}(z) = (1 - z^{-1})G(z)$$

Nebudeme-li respektovat skutečnost, že se v přenosu soustavy vyskytuje jedna nula  $n_1 = -2.928$  a jeden pól  $p_1 = -1$  mimo vnitřek jednotkové kružnice, můžeme volit  $G(z) = 1$  a tedy  $F_{wk} = z^{-1}$ . Číslicový regulátor má přenos

$$D(z) = \frac{3.0625(1 - 0.6065z^{-1})^2}{(1 + 2.928z^{-1})(1 + 0.2072z^{-1})}$$

Je-li skutečná hodnota přenosu soustavy

$$F_C(z) = 0.32653z^{-1} \frac{(1 + 2.5z^{-1})(1 + 0.2072z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})^2}$$

bude skutečný přenos řízení

$$F_w(z) = \frac{(1 + 2.5z^{-1})z^{-1}}{(1 + 2.5z^{-1})z^{-1} + (1 + 2.928z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{z + 2.5}{z^2 + 2.928z - 0.4276}$$

Charakteristická rovnice je pouze druhého řádu a její kořeny jsou

$$z_{1,2} = \frac{-2.928 \pm \sqrt{8.573 + 1.71}}{2} = \begin{cases} 0.1394 \\ -3.067 \end{cases}$$

Jeden kořen leží mimo jednotkovou kružnici a obvod je tedy nestabilní.

Budeme-li respektovat dříve uvedené požadavky s přihlédnutím ke stabilitě systému, bude přenos řízení popsán rovnicemi

$$F_{wk} = (1 + 2.928z^{-1})M(z)$$

$$1 - F_{wk} = (1 - z^{-1})N(z)$$

Druhá rovnice současně zajišťuje splnění podmínky nulové ustálené odchylky. Tvary polynomů  $M(z)$  a  $N(z)$  určíme z požadavku rovnosti koeficientů u stejných mocnin proměnné  $z$

$$(1 - z^{-1})(1 + n_1z^{-1}) = 1 - (1 + 2.928z^{-1})m_1z^{-1}$$

Koeficient  $m_0 = 0$  z důvodu fyzikální realizovatelnosti systému. Koeficient  $n_0 = 1$ , jak plyne z podmínky pro nestabilní póly. Řád obou polynomů volíme tak, aby výsledná soustava rovnic jednoznačně určovala všechny koeficienty. Porovnáním výrazů na obou stranách rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}n_1 - 1 &= -m_1 \\ -n_1 &= -2.928m_1\end{aligned}$$

a této soustavě rovnic vyhovují hodnoty  $m_1 = 0.2546$  a  $n_1 = 0.7454$ .

Požadovaný přenos řízení má tvar

$$F_{wk} = 0.2546z^{-1} + 0.7454z^{-2}$$

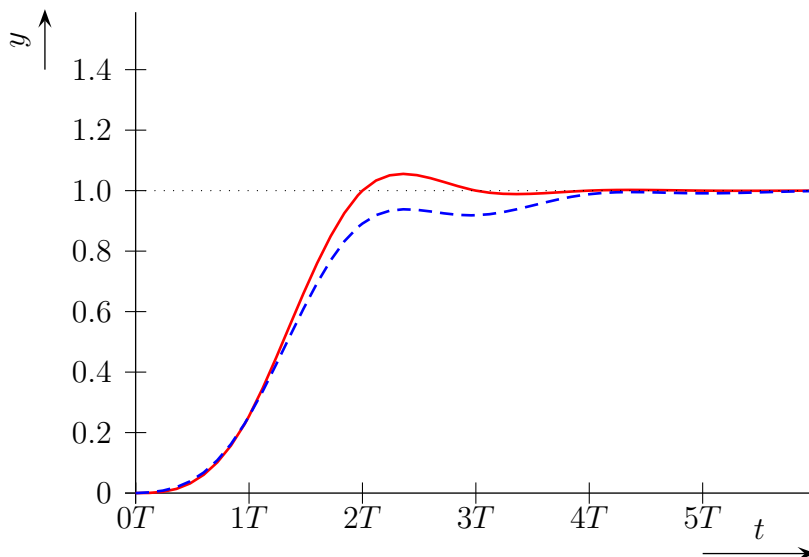
Skutečný přenos řízení vypočítáme dosazením jednotlivých přenosů

$$F_w(z) = \frac{\frac{1+2.5z^{-1}}{1+2.928z^{-1}} \frac{0.2546z^{-1}+0.7454z^{-2}}{1-0.2546z^{-1}-0.7454z^{-2}}}{1 + \text{čitatel}} = \frac{0.2546z + 0.6365}{z^2 - 0.1089}$$

Kořeny charakteristické rovnice nyní jsou

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{0.1089} = \pm 0.33$$

takže obvod je stabilní. Na obrázku 10.4 jsou nakresleny průběhy regulované veličiny při skokové změně řízení. Plná křivka odpovídá případu, kdy soustava má předpokládaný přenos, čárkovaná křivka odpovídá změněné přenosové funkci. V případě řídicího algoritmu, který nerespektuje podmínky (10.3), jsou výsledkem simulací nestabilní průběhy z důvodu zaokrouhlování při návrhu i při simulaci.



**Obrázek 10.4:** Obrázek k příkladu



**Příklad 10.2** *Regulovaná soustava má spojitý přenos*

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p+1)(p+1)}$$

Připojen je tvarovač nultého řádu, perioda vzorkování je  $T = 5s$ . Navrhněte diskrétní regulátor, který zajistí nulovou ustálenou odchylku při konstantním řízení a konečný regulační děj.

Modifikovaný diskrétní přenos spojitě části obvodu je

$$F_C(z, m) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \frac{1}{(5p+1)(p+1)} = \frac{p_2(m)z^2 + p_1(m)z + p_0(m)}{q_2z^2 + q_1z + q_0}$$

$$\begin{aligned} p_2(m) &= 1 - 1.25e^{-m} + 0.25e^{-5m} & q_2 &= 1 \\ p_1(m) &= 1.2584e^{-m} - 0.3420e^{-5m} - 0.3746 & q_1 &= -0.3746 \\ p_0(m) &= 0.0025 - 0.0084e^{-m} - 0.0920e^{-5m} & q_0 &= 0.0025 \end{aligned}$$

Pro  $m = 0$  má přenos hodnotu

$$F_C(z) = \frac{0.5418z + 0.0861}{z^2 - 0.3746z + 0.0025} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Podle požadavků má přenos řízení vyhovovat rovnicím

$$F_w(z) = P(z)R(z)$$

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})G(z)$$

Z hlediska realizovatelnosti musí mít první členy volitelných polynomů hodnoty  $r_0 = r_1 = 0$  a  $g_0 = 1$ . Další členy určíme z rovnice

$$1 - (0.5418z + 0.0861)r_2z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + g_1z^{-1})$$

ze které srovnáním koeficientů u stejných mocnin  $z$  dostaneme

$$0.5418r_2 = 1 - g_1$$

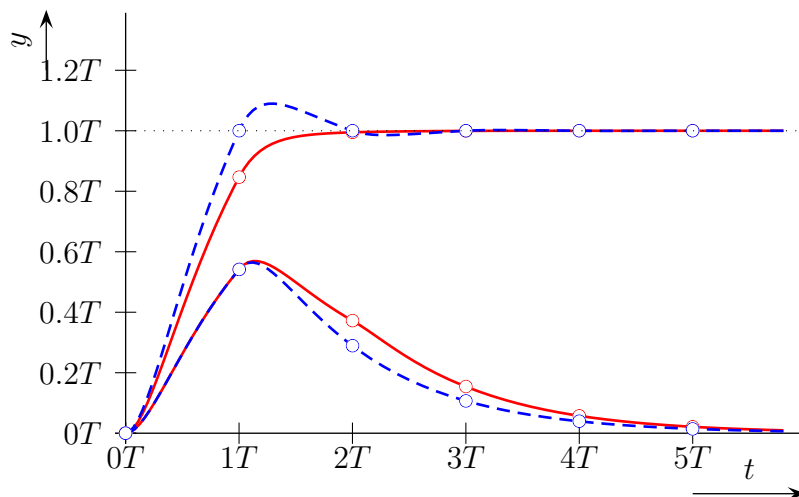
$$0.0861r_2 = g_1$$

Soustavě vyhovují hodnoty  $r_2 = 1.5926$  a  $g_1 = 0.1371$ . Požadovaný přenos řízení má tvar

$$F_w(z) = 0.8629z^{-1} + 0.1371z^{-2}$$

Přenos číslicového korekčního členu je

$$D(z) = 1.5926 \frac{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{1 - 0.8629z^{-1} - 0.1371z^{-2}}$$



Obrázek 10.5: Obrázek k příkladu

Průběh odezvy na jednotkovou změnu řídicí veličiny je na obrázku 10.5 (plná čára). Pro odezvu na konstantní poruchu jednotkové velikosti, působící na vstupu do soustavy platí

$$Y(z) = \frac{F_C U(z)}{1 + F_C(z)D(z)} = \frac{0.5418z^{-1} + 0.1604z^{-2} + 0.0118z^{-3}}{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}} =$$

$$= 0.5418z^{-1} + 0.3634z^{-2} + 0.1466z^{-3} + 0.0540z^{-4} + \dots$$

Graf této odezvy je nakreslen na obrázku 10.5 rovněž plnou čarou.

Pro srovnání vyšetříme ještě chování obvodu s algoritmem řízení, navrženým podle podmínky nulové ustálené odchylky a konečného přechodného děje jen pokud se týká časů vzorkování. Přenos řízení musí splňovat pouze podmínku

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})G(z)$$

kde  $G(z)$  je konečný polynom. Je zřejmé, že můžeme volit  $G(z) = 1$  a pak  $F_w(z) = z^{-1}$ . Přenos řídicího členu nyní je

$$D(z) = \frac{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{0.5418z^{-1} + 0.0861z^{-2}} \cdot \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} = 1.8457 \cdot \frac{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{1 - 0.8411z^{-1} - 0.1589z^{-2}}$$

Pro bližší určení tvaru odezvy na skokově proměnné řízení vypočítáme přenos v modifikované transformaci

$$F_w(z, m) = \frac{\frac{Q(z)}{P(z)} \cdot \frac{F_w(z)}{1 - F_w(z)} \cdot \frac{P(z, m)}{Q(z)}}{1 + \frac{F_w(z)}{1 - F_w(z)}} = \frac{P(z, m)}{P(z)} \cdot F_w(z) = \frac{p_2(m)z + p_1(m) + p_0(m)z^{-1}}{0.5418z + 0.0861}$$

Maximální hodnoty nabývá odezva v druhé periodě. Pro obraz odezvy platí

$$Y(z, m) = F_w(z, m) \cdot W(z) = \frac{P(z, m)}{P(z)} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{p_2(m)}{0.5418} + \frac{p_1(m) + 0.8411p_2(m)}{0.5418} z^{-1} + \dots$$

Pro čas  $t_m = T(1 + m)$ , ve kterém nastává maximum musí být

$$\frac{dx_2(m)}{dm} = \frac{d}{dm} \cdot \frac{p_1(m) + 0.8411p_2(m)}{0.5418} = 0$$

Dosadíme číselné hodnoty a dostaneme

$$0.2070e^{-m} - 0.1317e^{-5m} = 0$$

odkud plyne

$$m = -\frac{1}{4} \ln \left( \frac{0.2070}{0.6585} \right) = 0.2893$$

Čas  $t_m = 5(1 + 0.2893) = 6.4465\text{s}$  a maximální velikost odezvy je

$$y_2(T \cdot 1.2893) = 1.0899$$

Průběh odezvy na skokovou změnu řízení i konstantní poruchu, působící opět na vstupu soustavy, jsou naznačeny na obrázku 10.5 čárkovaně. Odezva na poruchu má obraz

$$Y_U(z) = \frac{F_C U(z)}{1 + D(z)F_C(z)} = F_C U(z)(1 - z^{-1}) = F_C(z)$$

takže odezva na poruchový signál typu jednotkového skoku je totožná s odezvou samotné soustavy (s tvarovačem) na jednotkový impuls:

$$y(t) = 1 - 1.25e^{-0.2t} + 0.25e^{-t} \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T$$

$$y(t) = 1.25e^{-0.2t}(e - 1) - 0.25e^{-t}(e^5 - 1) = 2.148e^{-0.2t} - 36.85e^{-t} \quad \text{pro } T \leq t$$

**Příklad 10.3** Konečnou dobu regulace můžeme dosáhnout i tehdy, obsahuje-li regulovaná soustava dopravní zpoždění. Často se přenosů prvního řádu s dopravním zpožděním používá k aproximaci skutečné přenosové funkce. Výhodou je, že řídicí algoritmy jsou pouze druhého řádu a nároky na paměť a rychlost řídicího počítače nejsou příliš veliké. Nechť přenos soustavy je ve tvaru

$$F_S(p) = \frac{e^{-ap}}{\tau p + 1}$$

a tvarovací člen je opět nultého řádu. Dále předpokládejme, že platí  $a < T$ .

Diskrétní přenos celé soustavy v modifikované  $m$  transformaci je

$$F_C(z, m) = {}_m \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \frac{1}{(\tau p + 1)} \right\}_{m=1-a/T} z^{-1} = \frac{(1 - c) - (d - c)z^{-1}}{z - d}$$

kde

$$d = e^{-\frac{T}{\tau}} \quad \text{a} \quad c = e^{-\frac{T}{\tau}(1 - \frac{a}{T})}$$

Při požadované nulové ustálené odchylce pro konstantní řídicí veličinu bude přenos řídicího členu

$$D(z) = \frac{(z-d)z}{(1-d)z^2 - (1-c)z + (d-c)}$$

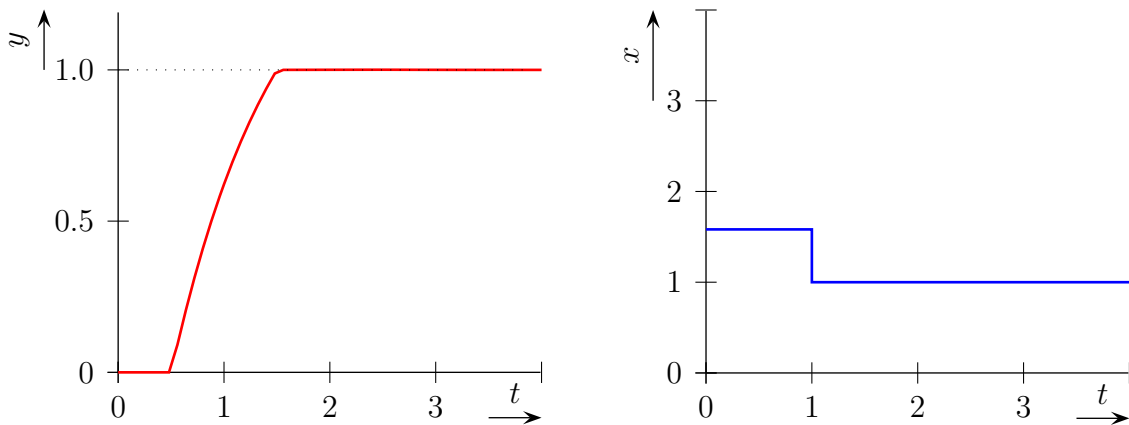
Tak například pro hodnoty  $T = 1$ ,  $\tau = 1$  a  $a = 0.5$  bude  $d = 0.3679$ ,  $c = 0.6065$  a přenos  $D(z)$

$$D(z) = 1.5820 \frac{1 - 0.3679z^{-1}}{1 - 0.6225z^{-1} - 0.3775z^{-2}}$$

Přenos řízení je

$$F_w(z) = \frac{1}{1-d} [(1-c)z^{-1} + (c-d)z^{-2}] = 0.6225z^{-1} + 0.3775z^{-2}$$

Tvar odezvy na jednotkovou změnu řízení a odpovídající průběh akční veličiny  $x(nT)$  jsou zakresleny na obrázku 10.6. Grafické znázornění řídicího algoritmu je na obrázku 10.7.



Obrázek 10.6: Obrázek k příkladu

**Příklad 10.4** Postup návrhu řídicího algoritmu zůstává stejný i tehdy, klademe-li na průběh regulačního děje zvýšené požadavky. Zvětší se počet podmínkových rovnic a tím i pracnost výpočtu. Regulovaná soustava je třetího řádu, astatická a její spojitý přenos (včetně tvarovacího členu) je

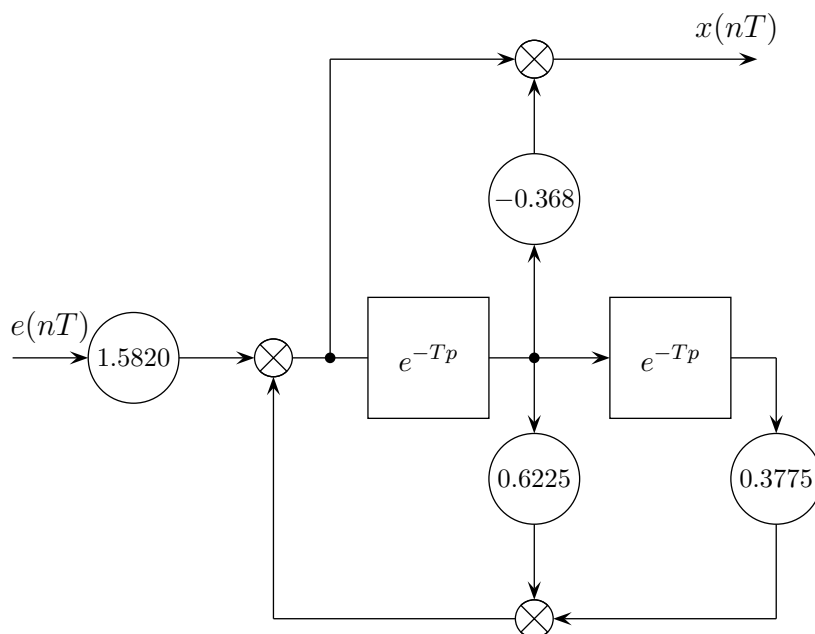
$$F_C(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p^2(20p + 1)^2}$$

Perioda vzorkování je  $T = 10s$ .

Tomu odpovídá diskrétní přenos

$$F_C(z) = 0.324 \frac{(1 + 2.95z^{-1})(1 + 0.21z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.607z^{-1})^2}$$

Požadujeme konečný počet kroků regulace a nulovou ustálenou odchylku při lineárně narůstajícím řídicím signálu  $w(t) = t$ . Jednotlivé požadavky formulují následující podmínkové rovnice:



Obrázek 10.7: Grafické znázornění realizace

1. fyzikální realizovatelnost regulátoru

$$F_w(z) = f_1 z^{-1} + \dots$$

2. stabilita

$$F_w(z) = (1 + 2.95z^{-1})M(z)$$

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})N(z)$$

3. nulová ustálená odchylka

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$$

tato podmínka je přísnější než druhá rovnice z bodu 2.

4. konečný regulační děj

$$F_w(z) = (1 + 2.95z^{-1})(1 + 0.21z^{-1})z^{-1}R(z)$$

tento požadavek je opět přísnější než první podmínka bodu 2.

Můžeme tedy celý bod 2. vynechat a nahradit jej body 3. a 4. Vzhledem k bodům 1. a 4. budou mít volitelné polynomy tvar

$$G(z) = 1 + g_1 z^{-1} + \dots + g_k z^{-k}$$

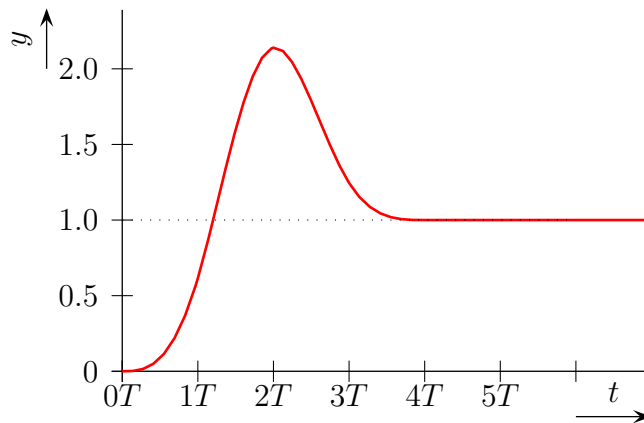
$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{k-1} z^{-(k-1)}$$

Koeficienty  $g_1, \dots, g_k$  a  $r_0, \dots, r_{k-1}$  vypočítáme z podmínky rovnosti koeficientů u stejných mocnin  $z^{-1}$  v následující rovnici

$$(1 - z^{-1})^2(1 + g_1z^{-1} + \dots + g_kz^{-k}) = 1 - z^{-1}(1 + 2.95z^{-1})(1 + 0.21z^{-1})(r_0 + r_1z^{-1} + \dots + r_{k-1}z^{-(k-1)})$$

Počet neznámých koeficientů je roven počtu rovnic při  $k = 2$ . Neznámé koeficienty jsou  $g_1 = 1.385$ ,  $g_2 = 0.2452$ ,  $r_0 = 0.6152$  a  $r_1 = -0.4043$ . Odpovídající přenos řízení má tvar

$$F_w(z) = 0.6152z^{-1} + 1.524z^{-2} - 0.8943z^{-3} - 0.2452z^{-4}$$



**Obrázek 10.8:** Obrázek k příkladu

Průběh odezvy na jednotkový skok řízení je na obrázku 10.8. Je zřejmé, že obvod není pro tento typ signálu vhodně navržen, neboť překmit je větší než 100%. Je proto třeba upravit vlastnosti obvodu dalším rozšířením požadavků. Postup je popsán v následujícím odstavci.

### 10.1.5 Další požadavky na regulační pochod

Kromě požadovaných vlastností regulace, uvedených v předcházejících odstavcích této kapitoly, je v některých případech nutné připojit další požadavky, vyplývající buď z konstrukčních podmínek, nebo z podmínek daných jinými kritérii. Nejčastěji to bývá maximální dovolený překmit a omezení akční veličiny vzhledem k realizaci tvarovacího členu. Splnění těchto dodatečných požadavků zajistíme formulací dalších podmínkových rovnic, které pak mají za následek rozšíření jak polynomu vyjadřujícího přenos řízení, tak i nároků na paměť paměťových buněk řídicího počítače.

Maximální překmit odezvy můžeme zmenšit tak, že přenos řízení rozšíříme přidavným polynomem (nejméně dvojčlenným). K již dříve uvedeným rovnicím přibude další ve tvaru

$$y(nT) = \sum_{i=0}^n f_i \leq (1 + 0.01H)$$

kde  $H$  je povolený překmit v procentech a  $f_i$  jsou koeficienty rozvoje přenosu řízení v nekonečnou řadu. Postup v praxi ukazuje následující příklad.

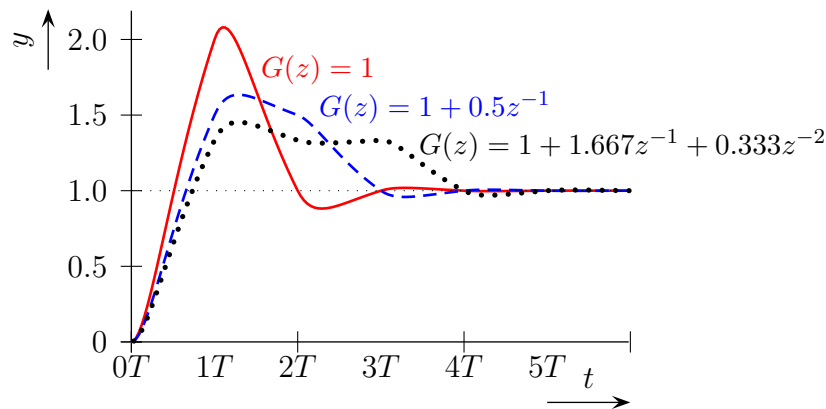
**Příklad 10.5** Regulační obvod u kterého požadujeme nulovou ustálenou odchylku při lineárně narůstající řídicí veličině, má přenos ve tvaru

$$F_w(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

což vyplývá z podmínky

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$$

kde  $G(z) = 1$ . Překmit odezvy na skokově proměnný signál je 100% pokud se týká časů vzorkování  $t_n = nT$ . Je-li soustava vyššího než prvního řádu, je skutečný překmit ještě větší, jak ukazuje obrázek 10.9 (plnou čarou).



Obrázek 10.9: Obrázek k příkladu

Přenos řízení rozšíříme dvojčlenem a dostaneme rovnici

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + g_1z^{-1})$$

$$F_w(z) = (2 - g_1)z^{-1} + (2g_1 - 1)z^{-2} - g_1z^{-3}$$

Pro amplitudy odezvy na jednotkový skok řízení platí

$$y(0) = 0$$

$$y(T) = 2 - g_1$$

$$y(2T) = 1 + g_1$$

$$y(3T) = 1$$

⋮

Posuzujeme-li regulační pochod pouze podle hodnot odezvy v okamžicích vzorkování, bude zřejmě optimální, když  $g_1 = 0.5$ . Přenos řízení pak je

$$F_w(z) = 1.5z^{-1} - 0.5z^{-3}$$

a průběh odezvy odpovídá čárkované křivce v obrázku 10.9. Rozšíříme-li původní přenosovou funkci trojčlenem,

$$1 - F_w(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + g_1z^{-1} + g_2z^{-2})$$

$$F_w(z) = (2 - g_1)z^{-1} + (2g_1 - 1 - g_2)z^{-2} + (2g_2 - g_1)z^{-3} - g_2z^{-4}$$

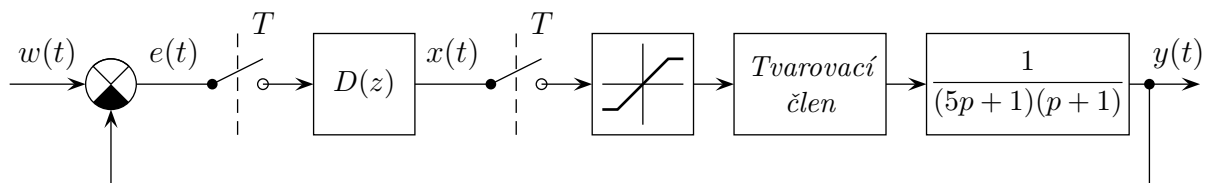
bude pro amplitudy  $y(nT)$  platit

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(T) &= 2 - g_1 \\ y(2T) &= 1 + g_1 - g_2 \\ y(3T) &= 1 - g_2 \\ y(4T) &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pokud přihlížíme opět pouze k časům vzorkování, je optimální volba konstant  $g_1 = 0.67$  a  $g_2 = 0.33$ , neboť pak amplitudy  $y(nT)$  pro  $n = 1, 2$  a  $3$  jsou stejné a rovné  $1.33$  (tečkovaný průběh v obrázku 10.9). Zde je pak ale vhodné sledovat též skutečné maximum a návrh algoritmu upravit s ohledem na celkový průběh.

Z fyzikálního názoru vyplývá, že čím rychlejší má být přechodný děj (čím dříve má být dosaženo žádané hodnoty), tím větší amplitudy akční veličiny je třeba použít. Akční veličina je však vždy omezena co do maximální amplitudy a k tomu je též třeba přihlížet při návrhu řídicího algoritmu. Jakmile žádaná hodnota je tak velká, že odpovídající akční zásah vybočí z pásma linearity, přestanou platit odvozené vztahy a regulační pochod již neprobíhá podle stanovených podmínek. Pro akční veličinu platí

$$X(z) = \frac{D(z)}{1 + F_C(z)D(z)}W(z) = \frac{F_w(z)}{F_C(z)}W(z)$$



**Obrázek 10.10:** Regulační obvod s omezením akčního zásahu

Jestliže při dovolené velikosti vstupních signálů překročí jednotlivé amplitudy  $x(nT)$  stanovené meze, je nutné upravit přenos  $F_w(z)$ . Pro systém na obrázku 10.10 byly navrženy tři řídicí algoritmy, které splňují podmínku nulové ustálené odchylky při lineárně narůstajícím řídicím signálu. Algoritmus  $D_1(z)$  odpovídá přenosu  $F_w(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$ , algoritmus  $D_2(z)$  je vypočítán pro přenos  $F_w(z) = 1.5z^{-1} - 0.5z^{-3}$  a algoritmus  $D_3(z)$  je vypočítán pro přenos  $F_w(z) = 1.333z^{-1} - 0.333z^{-4}$ . Hodnoty akční veličiny, odchylky a regulované veličiny pro prvních sedm period vzorkování při skokové změně řízení o jedničku jsou uvedeny v tabulce 10.1.

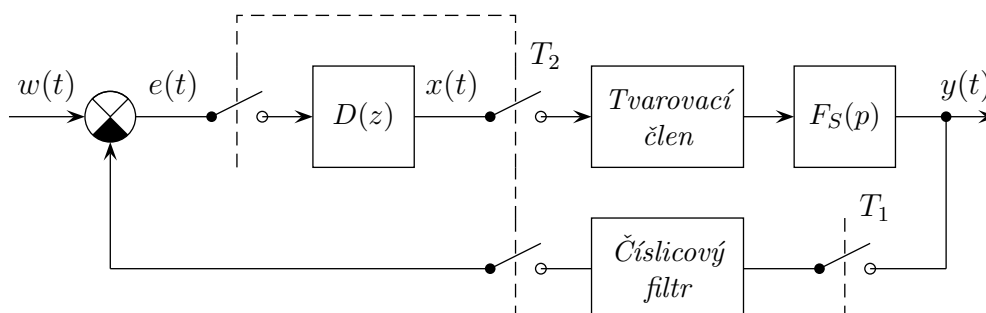
Rozšířené tvary přenosových funkcí je často třeba volit i z dalšího důvodu. Perioda měření (vzorkování) regulované veličiny je v praxi určována nejen s přihlédnutím



	$t$	0	$1T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$
	$w(nT)$	1	1	1	1	1	1	1
$D_1(z)$	$y(nT)$	0	1.5171	1.7082	0.9370	0.8980	0.9619	0.9860
	$e(nT)$	1.0000	-0.5171	-0.7082	0.0630	0.1020	0.0381	0.0140
	$x(nT)$	2.8000	1.6591	0.2917	0.9710	1.0046	0.9993	1.0001
$D_2(z)$	$y(nT)$	0	1.5	1.5	1.0	1.0	1.0	1.0
	$e(nT)$	1.0	-0.5	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
	$x(nT)$	2.7684	1.2918	0.6103	1.0642	0.9898	1.0016	0.9997
$D_3(z)$	$y(nT)$	0	1.3333	1.3333	1.3333	1.0	1.0	1.0
	$e(nT)$	1.0	-0.3333	-0.3333	-0.3333	0.0	0.0	0.0
	$x(nT)$	2.4609	1.1481	1.3627	0.7135	1.0470	0.9925	1.0012

**Tabulka 10.1:** Srovnání hodnot jednotlivých signálů

k potřebám regulace, ale též na podkladě požadavků daných potřebami informačního systému, sledováním mezních hodnot a pod. Tak se může stát, že tato perioda vzorkování je menší než jaká by byla optimální s ohledem na omezení akční veličiny. V systému je pak možné zavést dvojí periodu vzorkování. Periodu  $T_1$  pro měření a periodu  $T_2$  pro akční zásahy. V takovém případě pak lze signál z čidla regulované veličiny podrobit číslicové filtraci a snížit tak vliv náhodných poruch (obrázek 10.11).



**Obrázek 10.11:** Regulační obvod s různými periodami vzorkování

## 10.2 Návrh řídicího algoritmu podle požadavků na přenos poruchy

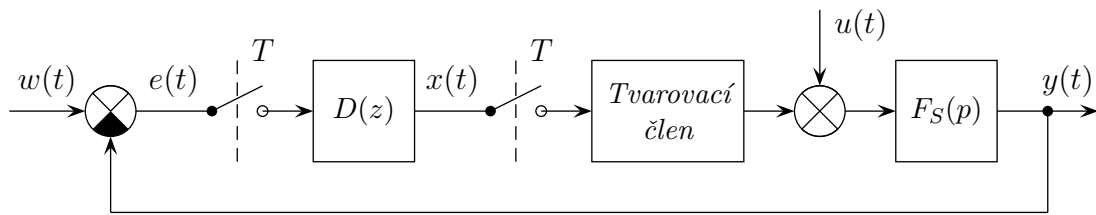
Obvykle předpokládáme, že poruchový signál působí na vstupu regulované soustavy spolu s akční veličinou (obrázek 10.12).

Přenos poruchy v uzavřeném obvodě je

$$F_u(z, m) = \frac{F_S U(z, m)}{1 + F_C(z) D(z)} \cdot \frac{1}{U(z)} \tag{10.4}$$

kde

$$F_S U(z, m) = {}_m \{ F_S(p) U(p) \}$$

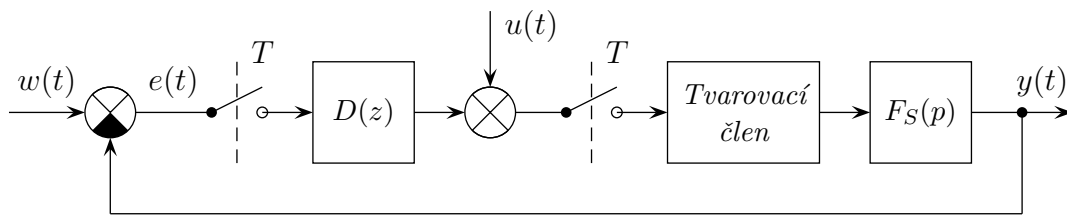


**Obrázek 10.12:** Regulační obvod s poruchou na vstupu soustavy

a

$$F_C(z) = \text{ekv} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} F_S(p) \right\}$$

Jak je zřejmé, tvar přenosu poruchy závisí na typu poruchy. Tato závislost poněkud komplikuje rozbor chování systému. Pokud předpokládáme pouze skokově proměnný poruchový signál (a ke změnám dochází jen v časech vzorkování), můžeme schéma obvodu překreslit podle obrázku 10.13.



**Obrázek 10.13:** Regulační obvod se vzorkovanou poruchou

Přenos poruchy je nyní

$$F_u(z, m) = \frac{F_C(z, m)}{1 + F_C(z)D(z)} \quad (10.5)$$

Tento vzorec platí pouze za dříve uvedených podmínek, jinak je třeba používat vztah (10.4). Pro přenos  $F_u(z, m)$  platí podobné podmínkové rovnice jako pro přenos řízení.

### 10.2.1 Fyzikální realizovatelnost regulátoru

Nechť je přenos spojité části obvodu

$$F_C(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots$$

Protože porucha působí soustavou  $F_C(z)$ , nemůže se na výstupu objevit rychleji, než je reakce soustavy, proto

$$F_U(z) = u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \dots$$

Z rovnice (10.5) plyne

$$D(z) = \frac{F_C(z) - F_u(z)}{F_C(z)F_u(z)}$$

Dosazením výše definovaných přenosů  $F_U(z)$  a  $F_C(z)$  získáváme

$$D(z) = \frac{g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots - u_1 z^{-1} - u_2 z^{-2} - \dots}{g_1^2 z^{-2} + g_1(g_2 + u_2)z^{-3} + \dots}$$

Má-li být přenos  $D(z)$  realizovatelný, nesmí být řád čitatele vyšší než řád jmenovatele. To bude splněno, pokud bude

$$g_1 - u_1 = 0$$

První člen v rozvoji přenosu  $F_u(z)$  musí být roven prvnímu členu rozvoje  $F_C(z)$ .

Vyplývá to také přímo z fyzikálního názoru, neboť působením regulátoru můžeme průběh odezvy na poruchový signál ovlivnit teprve tehdy, až se projeví působení poruchy - až vznikne regulační odchylka.

Pro systémy s dopravním zpožděním, kdy soustava zpožďuje o  $k$  kroků (kde  $k > 1$ ), se musí shodovat prvních  $k$  členů rozvoje přenosu  $F_u(z)$  a  $F_C(z)$ .

### 10.2.2 Nulová odchylka v ustáleném stavu

Pro regulační odchylku při působení poruchy platí

$$E(z) = -Y(z) = -F_u(z)U(z)$$

Podmínku nulové ustálené odchylky odvodíme pomocí věty o konečné hodnotě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = - \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F_u(z)U(z) = 0$$

Z toho vyplývají následující podmínky:

$$\begin{array}{ll} \text{pro } u(t) = u_0 & F_u(z) = (1 - z^{-1})G(z) \\ \text{pro } u(t) = at & F_u(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z) \\ \text{pro } u(t) = bt^2 & F_u(z) = (1 - z^{-1})^3 G(z) \end{array}$$

kde  $G(z)$  je volitelný polynom.

### 10.2.3 Konečná doba trvání přechodného děje

Stejným způsobem jako v případě přenosu řízení odvodíme tyto podmínky:

Přechodný děj (sledovaný pouze v okamžicích vzorkování) je konečný tehdy, má-li přenos poruchy  $F_u(z)$  v rozvedeném tvaru konečný počet členů. Pro konečný počet kroků regulace (přechodný děj konečný i mezi časy vzorkování) je třeba, aby i rozvoj modifikovaného přenosu  $F_u(z, m)$  měl konečný počet členů. Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě lze podmínku splnit pouze tehdy, obsahuje-li přenos poruchy celý číselový polynom spojitě části soustavy

$$F_u(z, m) = P(z, m)R(z)$$

kde

$$F_C(z, m) = \frac{P(z, m)}{Q(z)}$$

**Příklad 10.6** *Regulovaná soustava má spojitý přenos*

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p + 1)(p + 1)}$$

*Perioda vzorkování je  $T = 5$ s. Navrhněte diskrétní regulátor  $D(z)$  tak, aby při konstantní poruše působící na vstupu soustavy byla ustálená odchylka nulová a počet kroků regulace konečný.*

Přenos poruchy musí splňovat tyto rovnice

$$F_u(z) = (1 - z^{-1})(g_0 + g_1 z^{-1} + \dots)$$

$$F_u(z) = P(z)(r_0 + r_1 z^{-1} + \dots)$$

Diskrétní přenos soustavy s tvarovačem je

$$F_C(z) = \frac{0.5418z^{-1} + 0.0861z^{-2}}{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}$$

Soustava zpožďuje procházející signál o jeden impuls a první členy volitelných polynomů mají tedy hodnoty  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = p_1$  a  $r_0 = 1$ . Porovnáním koeficientů v obou podmínkových rovnicích vypočítáme hodnoty ostatních členů

$$(1 - z^{-1})(g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}) = (0.5418z^{-1} + 0.0861z^{-2})(1 + r_1 z^{-1})$$

$$g_1 = 0.5418 \quad , \quad g_2 = 0.0861 \quad \text{a} \quad r_1 = -1$$

Přenos poruchy pak je

$$F_u(z) = 0.5418z^{-1} - 0.4557z^{-2} - 0.0861z^{-3}$$

a přenos řídicího členu

$$D(z) = \frac{1}{F_u(z)} - \frac{1}{F_C(z)} = \frac{1 - Q(z)(1 - z^{-1})}{P(z)(1 - z^{-1})} = \frac{1.3746 - 0.3771z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{0.5418z^{-1} - 0.4557z^{-2} - 0.0861z^{-3}}$$

Pro přenos řízení platí

$$F_w(z, m) = \frac{F_C(z, m)D(z)}{1 + F_C(z)D(z)} = F_u(z, m)D(z)$$

Podle daných podmínek přenos poruchy je

$$F_u(z, m) = P(z, m)(1 - z^{-1})$$

a přenos řídicího členu

$$D(z) = \frac{F_C(z) - F_u(z)}{F_C(z)F_u(z)}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice pro přenos řízení, dostaneme

$$F_w(z, m) = P(z, m)(1 - z^{-1}) \frac{\frac{P(z)}{Q(z)} - P(z)(1 - z^{-1})}{\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot P(z)(1 - z^{-1})} = \frac{P(z, m)}{P(z)} [1 - Q(z)(1 - z^{-1})]$$

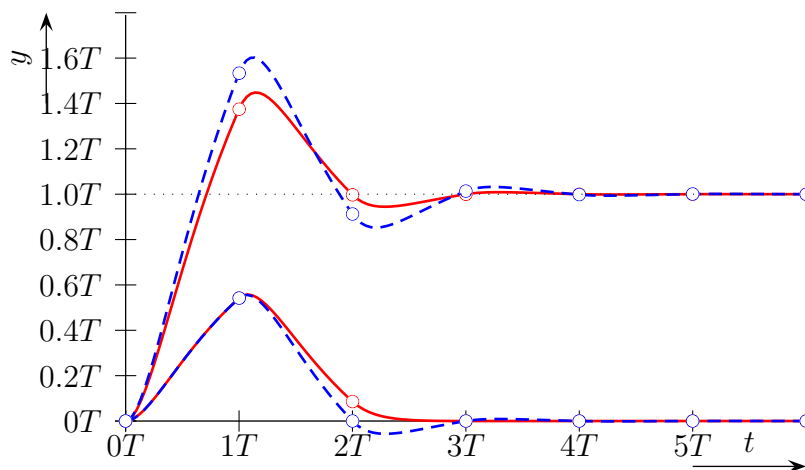
Z této rovnice je zřejmé, že přechodný děj při změně řídicí veličiny je konečný pouze v okamžicích vzorkování, neboť přenos  $F_w(z, m)$  má konečný počet členů jen při  $m = 0$ . Pak platí

$$F_w(z) = 1.3746z^{-1} - 0.3771z^{-2} + 0.0025z^{-3}$$

Pro časy, rovné polovině periody vzorkování, vypočítáme

$$F_w(z, 0.5) = \frac{0.3606 + 0.3966z^{-1} - 0.1283z^{-2} - 0.0010z^{-3}}{0.5418 + 0.0861z^{-1}}$$

Odezvy na jednotkový skok řízení a poruchy jsou nakresleny na obrázku 10.14 (plné křivky).



**Obrázek 10.14:** Obrázek k příkladu

Kdybychom požadovali při skokové poruše přechodný děj konečný pouze v časech vzorkování, stačilo by, aby přenos poruchy vyhovoval rovnici

$$F_u(z) = (1 - z^{-1})p_1z^{-1}$$

kde  $p_1$  je první člen v rozvoji funkce  $F_C(z)$ . To vyplývá z požadavku realizovatelnosti řídicího členu. Pro uvedený případ platí

$$F_u(z) = 0.5418z^{-1} - 0.5418z^{-2}$$

a přenos řídicího členu nyní je

$$D(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})p_1 z^{-1}} - \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1.5336 - 0.3771z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{0.5418 - 0.4557z^{-1} - 0.0861z^{-2}}$$

Přenos řízení pak bude

$$\begin{aligned} F_w(z) &= p_1(1 - z^{-1})z^{-1} \frac{\frac{P(z)}{Q(z)} - p_1(1 - z^{-1})z^{-1}}{\frac{P(z)}{Q(z)}(1 - z^{-1})p_1 z^{-1}} = \\ &= 1 - \frac{Q(z)}{P(z)} p_1(1 - z^{-1})z^{-1} = \frac{0.8309z^{-1} - 0.2044z^{-2} + 0.0014z^{-3}}{0.5418 + 0.0861z^{-1}} = \\ &= 1.5336z^{-1} - 0.6209z^{-2} + 0.1013z^{-3} + \dots \end{aligned}$$

V tomto případě není přechodný děj konečný ani v okamžicích vzorkování. Odezvy na skok řízení i poruchy při tomto řídicím algoritmu jsou čárkovane nakresleny na obrázku [10.14](#).

### 10.3 Regulační obvody se dvěma korekčními členy

V praxi jsou často požadavky na přenos řízení i poruchy kladeny současně. Požadujeme, aby byla konečná i mezi okamžiky vzorkování odezva na řízení a zároveň na poruchu. V tomto případě nelze dosáhnout požadovaných minimálních realizací přenosu žádané hodnoty a odchylky ve tvaru

$$F_w(z) = P(z) \cdot k \tag{10.6}$$

$$F_u(z) = (1 - z^{-1})P(z) \tag{10.7}$$

kde

$$k = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

použitím jediného korekčního členu. To je možné pouze za podmínky rozšíření polynomů  $F_w(z)$  a  $F_u(z)$  o vhodné polynomy. Minimálních realizací lze dosáhnout použitím regulačního obvodu se dvěma korekčními členy, jehož schéma je ukázáno na obrázku [10.15](#).

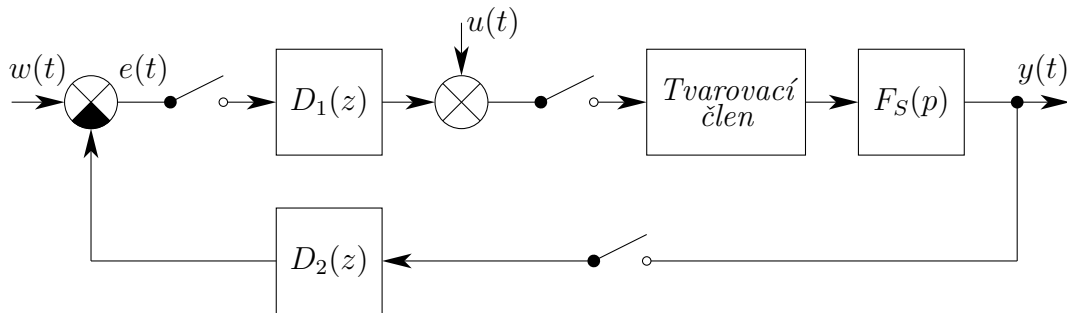
Toto schéma s sebou nepřináší změnu v přístrojovém uspořádání. Zapojením řídicího členu  $D_2(z)$  vzrostou pouze požadavky na programové vybavení řídicího počítače. Jsou-li zapojeny dva řídicí členy, platí pro přenos řízení a poruchy

$$F_w(z) = \frac{F_C(z)D_1(z)}{1 + F_C(z)D_1(z)D_2(z)}$$

$$F_u(z) = \frac{F_C(z)}{1 + F_C(z)D_1(z)D_2(z)}$$

odkud lze vypočítat jednotlivé řídicí algoritmy

$$D_1(z) = \frac{F_w(z)}{F_C(z)[1 - D_2(z)F_w(z)]}$$



Obrázek 10.15: Diskrétní regulační obvod se dvěma stupni volnosti

$$D_2(z) = \frac{F_C(z) - F_U(z)}{F_C(z)F_u(z)D_1(z)}$$

Pro požadavky uvedené v rovnicích (10.6) a (10.7) dostaneme

$$D_1(z) = \frac{k}{(1 - z^{-1})}$$

$$D_2(z) = \frac{1 - (1 - z^{-1})Q(z)}{sP(z)}$$

Kde  $s$  je konstanta zajišťující jednotkové statické zesílení přenosu řízení.

**Příklad 10.7** Pro soustavu s diskrétním přenosem

$$F_C(z) = \frac{0.5418z^{-1} + 0.0864z^{-2}}{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}$$

navrhněte regulátory  $D_1(z)$  a  $D_2(z)$  tak, aby byl regulační děj na skokovou změnu řízení i poruchy konečný i mezi okamžiky vzorkování.

Budeme hledat minimální realizaci přenosu řízení a poruchy, proto musí být splněny rovnice (10.6) a (10.7). Přenos řídicího členu v přímé větvi bude

$$D_1(z) = \frac{1}{0.6279(1 - z^{-1})} = \frac{1.5926}{1 - z^{-1}}$$

a přenos řídicího členu ve zpětné vazbě

$$D_2(z) = \frac{1.5930 - 0.4370z^{-1} + 0.0029z^{-2}}{1 + 0.1589z^{-1}}$$

Odezva obvodu na jednotkovou skokovou změnu řízení i skok poruchy jsou na obrázku ...

## 10.4 Návrh řídicího algoritmu s omezeným počtem členů. Regulátory typu P, S, PS, PD a PSD

Přenosové funkce řídicího členu, vypočítané na základě požadavků na dynamické i statické vlastnosti regulačního obvodu, mohou být značně složité. Ve skutečném provozu však

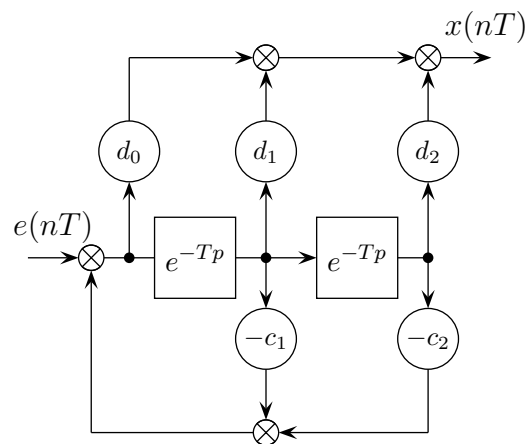
málokdy bývá dosaženo přesného souhlasu mezi požadovaným a skutečným průběhem regulačního děje. Matematický model soustavy, se kterým při návrhu pracujeme, neodpovídá většinou naprosto přesně skutečným vlastnostem soustavy a je jen jejich aproximací. Naskytá se pak otázka, zda velmi složitý a na rychlost i kapacitu náročný řídicí algoritmus je výhodný. Často vystačíme s jednodušším tvarem přenosu  $D(z)$ , aniž dojde k podstatnému zhoršení kvality regulačního děje. Pro návrh regulátoru s omezeným počtem koeficientů v přenosu můžeme použít tři různé metody. Liší se tím, na kterém stupni projektu použijeme aproximace.

#### 10.4.1 Zjednodušení přenosu soustavy

Přenos regulované soustavy nahradíme přenosem nejvýše druhého řádu, nebo prvního řádu s dopravním zpožděním. Při běžných požadavcích (např. podle odstavce 10.1 nebo 10.2 této kapitoly) je vypočítaný přenos řídicího členu ve tvaru

$$D(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}$$

Blokové schéma algoritmu, který realizuje tento řídicí člen je na obrázku 10.16. Pro výpočet okamžité hodnoty akční veličiny je třeba pěti násobení a čtyř součtů. V paměti je obsazeno 7 buněk. Tento postup dává poměrně dobré výsledky, záleží ovšem hlavně na použité aproximační metodě.



Obrázek 10.16: Grafické znázornění realizace

#### 10.4.2 Zjednodušení navrženého regulátoru

Přenos řídicího členu navrhujeme podle skutečného přenosu regulované soustavy a zadaných požadavků. Vypočítaný přenos  $D(z)$  pak nahradíme jednodušším typem, který svými vlastnostmi odpovídá spojitým regulátorům typu P, I, PI, PD nebo PID.



Při vytváření PSD regulátoru jako analogie PID regulátoru se většinou vychází z tvaru přenosu regulátoru z rovnice (4.5)

$$F_R(p) = K_R \left( 1 + T_D p + \frac{1}{T_I p} \right) \quad (10.8)$$

V regulačním schématu vstupuje do regulátoru odchylka. V časové oblasti se dá působení PID regulátoru popsat rovnicí

$$u(t) = K_R \left( e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \quad (10.9)$$

Jak již bylo popsáno v kapitole 4, je tento typ popisu vhodný k praktické realizaci z důvodu snadné fyzikální názornosti. Jedná se o tvar regulátoru, kdy se odděleně vytvářejí jeho jednotlivé složky. Proporcionální složka zůstává v diskrétní verzi stejná, jako ve verzi spojitě. Derivace se nahradí výpočtem diference

$$\frac{de}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad \approx \quad \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

, kde  $T$  je perioda vzorkování. V případě integrace se používá obdélníková popřípadě lichoběžníková aproximace. U obdélníkové aproximace se nahradí průběh mezi okamžiky vzorkování jednou jeho krajní hodnotou s tím, že se uvažuje, že se mezi okamžiky vzorkování nemění. Pokud vezmeme levou krajní hodnotu, jedná se o dopřednou obdélníkovou aproximaci. Pokud bychom naopak zvolili pravou krajní hodnotu, jednalo by se o zpětnou obdélníkovou aproximaci. V případě lichoběžníkové aproximace se průběh mezi dvěma okamžiky vzorkování nahradí úsečkou, spojující levou a pravou krajní hodnotu. Integrál tohoto průběhu odpovídá obsahu lichoběžníku. Uvažujme pro jednoduchost zpětnou obdélníkovou aproximaci. Potom se dá integrál nahradit následující sumací

$$\int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^{NT} e(\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad T \sum_{n=0}^N e(n) \quad \approx \quad \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

S uvážením těchto zjednodušení přechází rovnice (10.9) na tvar

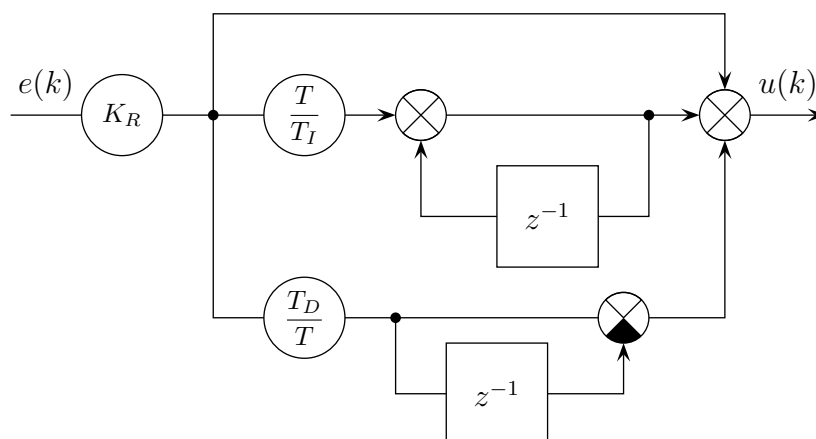
$$u(k) = K_R \left( e(k) + \frac{T_D}{T} (e(k) - e(k-1)) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) \right) \quad (10.10)$$

ze kterého určíme diskrétní přenosovou funkci PSD regulátoru

$$F_R(z^{-1}) = K_R \left( 1 + \frac{T_D}{T} (1 - z^{-1}) + \frac{T}{T_I} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \quad (10.11)$$

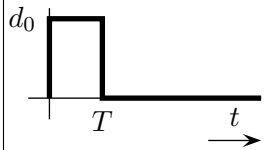


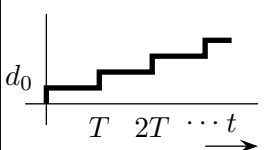
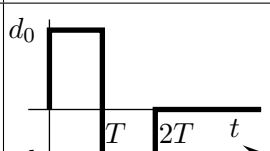
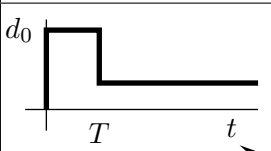
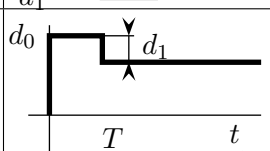
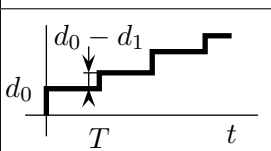
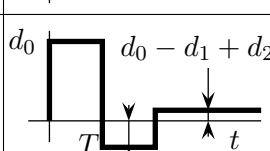
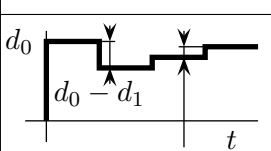
Blokové schéma PSD regulátoru je na obrázku 10.17.

Derivační složka v rovnici (10.8) je jak víme nerealizovatelná. V praxi se doplňuje realizační konstantou  $(\varepsilon p + 1)$  ve jmenovateli. Pro dosažení lepšího chování PSD regulátoru, jako diskrétní verze PID regulátoru, se často realizační konstanta převádí i do této diskrétní verze, ikdyž to z hlediska realizovatelnosti není nutné.



**Obrázek 10.17:** PSD regulátor

V tabulce 10.2 jsou uvedeny jednotlivé typy těchto jednoduchých regulátorů. Jsou zde uvedeny jejichž přenosové funkce, odezvy na jednotkový impuls i na konstantní vstupní signál, odpovídající typy přenosů spojitých regulátorů a počet paměťových buněk, nutných k realizaci daného algoritmu řízení. Počet paměťových buněk obsahuje buňky pro uložení konstant regulátoru a pro uložení jeho stavových veličin. Například PSD regulátor obsahuje tři konstanty regulátoru  $K_R$ ,  $T_I$  a  $T_D$  a dvě stavové proměnné (jedna pro výpočet difference a jedna pro uchování hodnoty sumátoru).

Typ regulátoru	$D(z)$	Odezva na jednotkový impuls	Odezva na konstantní signál	Odpovídající spojité přenos	Počet paměťových buněk
Proporcionální P	$D(z) = d_0$			$F(p) = k$	1
Sumační S	$D(z) = \frac{d_0}{(1 - z^{-1})}$			$F(p) = \frac{k}{p}$	2
Proporcionálně diferenční PD	$D(z) = d_0 - d_1 z^{-1}$			$F(p) = k(1 + T_d p)$	3
Proporcionálně sumační PS	$D(z) = \frac{d_0 - d_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$			$F(p) = k(1 + \frac{1}{T_i p})$	3
Proporcionálně sumačně diferenční PSD	$D(z) = \frac{d_0 - d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$			$F(p) = k(1 + T_d p + \frac{1}{T_i p})$	5

Tabulka 10.2: Diskrétní ekvivalenty spojitéch PID regulátorů

Provedenou aproximaci je však vždy nutné kontrolovat výpočtem přenosu uzavřené smyčky.

**Příklad 10.8** *Pro soustavu s přenosem*

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p + 1)(p + 1)}$$

a periodou vzorkování  $T = 5s$  jsme v předchozích odstavcích navrhli dva různé algoritmy řízení. Srovnajte jejich impulsové charakteristiky a aproximujte je jednodušším typem regulátorů.

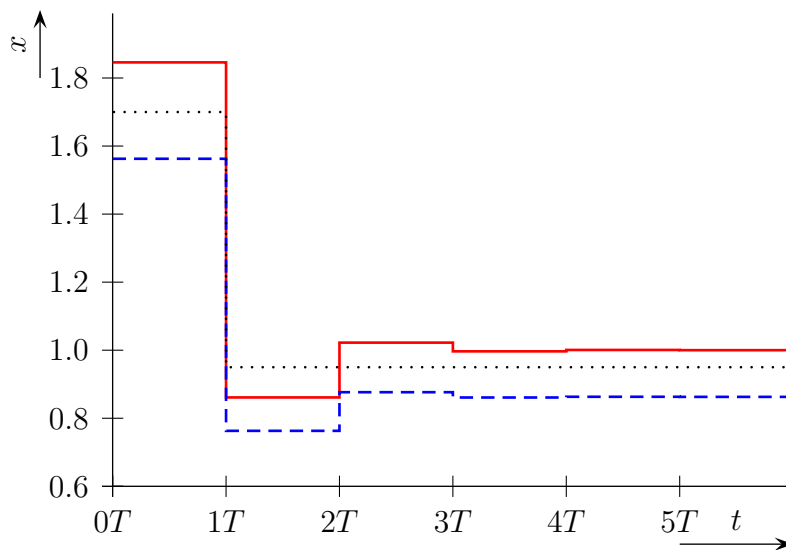
Byly navrženy regulátory:

- 1) pro přechodný děj konečný jen v časech vzorkování

$$D_1(z) = 1.8457 \cdot \frac{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{1 - 0.8411z^{-1} - 0.1589z^{-2}}$$

- 2) pro konečný počet regulačních kroků (děj konečný i mimo okamžiky vzorkování)

$$D_2(z) = 1.5926 \frac{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}}{1 - 0.8629z^{-1} - 0.1371z^{-2}}$$



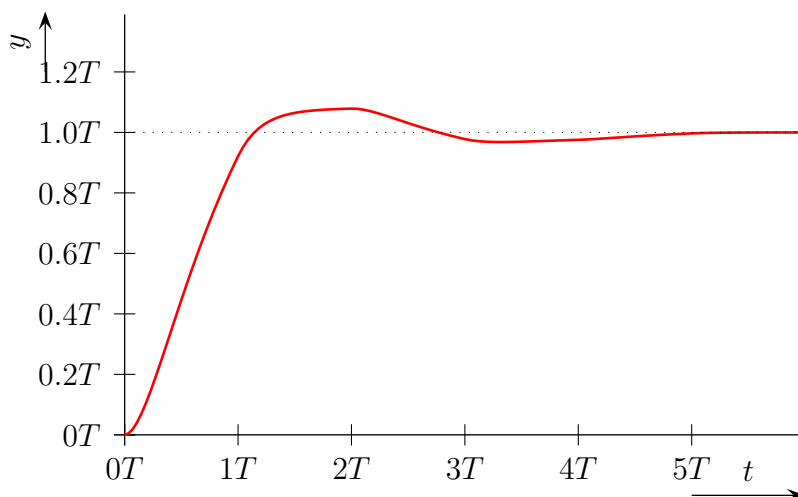
**Obrázek 10.18:** Impulsové charakteristiky regulátorů  $D_1(z)$  (plnou čarou),  $D_2(z)$  (čárkovanou čarou) a PS (tečkovaně)

Z obrázku 10.18, kde jsou nakresleny impulsové odezvy navržených regulátorů (pro  $D_1(z)$  plnou čarou a pro  $D_2(z)$  čárkovaně) vyplývá, že rozdíly jsou velmi malé. Podle tabulky 10.2 se průběh podobá impulsové charakteristice proporcionálně sumačního regulátoru. Jako aproximaci proto zvolíme PS regulátor s přenosem

$$D(z) = \frac{1.7 - 0.75z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Jeho impulsová charakteristika je na obrázku 10.18 nakreslena tečkovaně. Obraz odezvy uzavřeného obvodu s PS regulátorem na skok řízení je

$$Y(z) = \frac{0.9211z^{-1} - 0.2600z^{-2} - 0.0646z^{-3}}{1 - 1.4535z^{-1} + 0.5706z^{-2} - 0.1842z^{-3} + 0.0671z^{-4}}$$



**Obrázek 10.19:** Odezva na skokovou změnu řízení při použití PS regulátoru

Časový průběh je nakreslen na obrázku 10.19. Kvalita regulačních pochodů dosažitelná pomocí těchto jednoduchých regulátorů, je mnohem menší, než při použití algoritmů s neomezenou přenosovou funkcí. V případech soustav vyšších řádů nebo zvýšených požadavků na regulační vlastnosti není ani možné jednoduchým regulátorem typu PSD dané požadavky splnit.

**Příklad 10.9** V odstavci 10.1 d) této kapitoly jsme řešili návrh řídicího algoritmu pro soustavu s přenosem

$$F_S(p) = \frac{1}{p(20p + 1)^2}$$

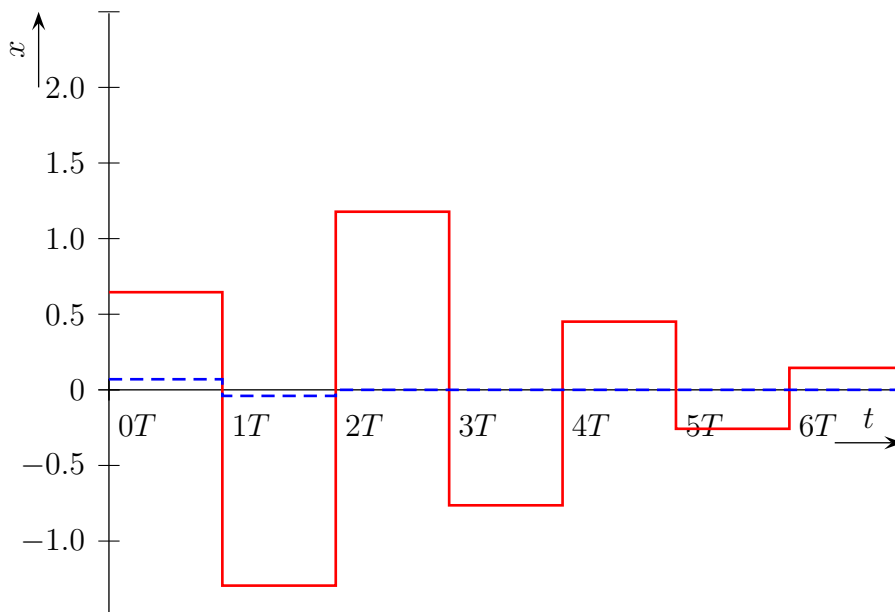
při požadavcích nulové ustálené odchylky pro lineárně narůstající řídicí signál  $w(t) = t$  a konečný regulační děj.

Navržený regulátor nelze nahradit jednoduchým algoritmem PSD. Pokud se spokojíme s nulovou odchylkou pouze při konstantním řízení, bude mít přenosová funkce tvar

$$F_w(z) = 0.2092z^{-1} + 0.6611z^{-2} + 0.1297z^{-3}$$

Diskrétní přenos soustavy s tvarovačem nultého řádu je

$$F_C(z) = 0.324 \frac{(1 + 2.95z^{-1})(1 + 0.21z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.607z^{-1})^2}$$



**Obrázek 10.20:** Obrázek k příkladu

a přenos číslicového regulátoru

$$D_1(z) = \frac{0.6457 - 0.7839z^{-1} + 0.2379z^{-2}}{1 + 0.7908z^{-1} + 0.1297z^{-2}}$$

Odezva regulátoru na jednotkový impuls je na obrázku 10.20 plnou čarou. Tento přenos opět nelze aproximovat regulátorem jednoduchého typu. Nejvhodnější jednoduchý regulátor je typu PD. Kritické zesílení regulátoru  $P$  vypočítáme např. pomocí bilineární transformace a Hurwitzova kritéria. Jeho hodnota je  $d = 0.0685$ . Vhodný přenos typu PD je

$$D_2(z) = 0.07 - 0.04z^{-1}$$

Přenos řízení pak je

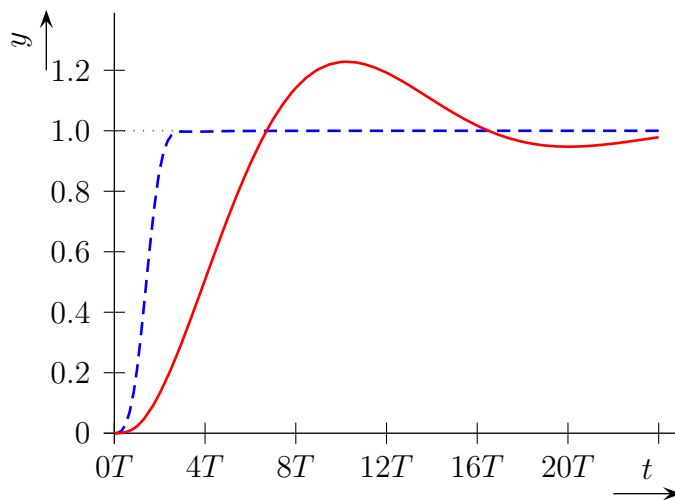
$$F_w(z) = \frac{0.0227z^{-1} + 0.0587z^{-2} - 0.0269z^{-3} - 0.008z^{-4}}{1 - 2.1913z^{-1} + 1.6411z^{-2} - 0.3953z^{-3} - 0.008z^{-4}}$$

Impulsní charakteristika PD regulátoru je na obrázku 10.20 čárkovanou čarou. Časový průběh odezvy na jednotkovou změnu řízení je nakreslen na obrázku 10.21, kde je pro srovnání též uvedena odezva systému, je-li zapojen přenos  $D_1(z)$ .

### 10.4.3 Návrh spojitého regulátoru a jeho převod na číslicový

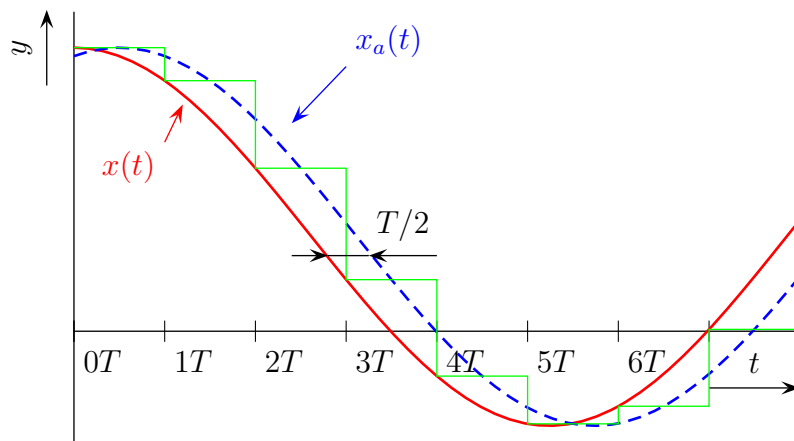
Jsou-li časové konstanty regulované soustavy značně větší než je perioda vzorkování, můžeme navrhnout vhodný spojitý regulátor a přenos diskrétního řídicího členu  $D(z)$  zvolit tak, aby se jejich přechodové charakteristiky co nejvíce přibližovaly.

Spojitý regulátor navrhujeme pro soustavu s přenosem  $F_S(p)$  a vzorkovací člen s tvarovačem nahradíme členem typu dopravního zpoždění o velikosti poloviny periody



**Obrázek 10.21:** Odezva na skokovou změnu řízení při použití PD regulátoru ve srovnání s původním regulátorem  $D_1(z)$

vzorkování  $T/2$ . Blokové schéma je na obrázku 10.23. Tato náhrada vychází ze skutečnosti, že vzorkovaný a tvarovaný signál akční veličiny je vyhlazen velkými časovými konstantami v soustavě a výsledná odezva je přibližně rovna odezvě na signál, který je střední hodnotou pravoúhlých akčních impulsů (obrázek 10.22). Tento signál  $x_a(t)$  je proti původnímu  $x(t)$  posunut o polovinu periody vzorkování.

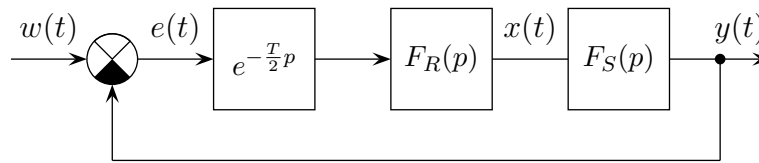


**Obrázek 10.22:** Vysvětlení aproximace vzorkovače s tvarovačem pomocí dopravního zpoždění

**Příklad 10.10** Navrhněte řídicí algoritmus pro soustavu se spojitým přenosem

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p + 1)(p + 1)}$$

s periodou vzorkování  $T = 1s$ .



**Obrázek 10.23:** Náhrada vzorkovacího členu s tvarovačem dopravním zpožděním

Vhodný spojitý regulátor typu PI má přenos

$$F_R(p) = 0.5 \frac{5p + 1}{p} = 2.5 \left(1 + \frac{1}{5p}\right)$$

Tvar tohoto přenosu můžeme vypočítat některou z metod teorie lineární spojité regulace. Má-li spojitý přenos tvar

$$F_R(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$$

je odpovídající diskrétní přenos

$$D(z) = \frac{d_0 - d_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

kde

$$d_0 = k \left(1 + \frac{1}{T_i}\right) \quad \text{a} \quad d_1 = k$$

Po dosazení dostaneme

$$D(z) = \frac{3 - 2.5z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Diskrétní přenos soustavy s tvarovačem je

$$F_C(z) = \frac{0.0686z^{-1} + 0.0460z^{-2}}{1 - 1.1866z^{-1} + 0.3011z^{-2}}$$

a celková hodnota přenosové funkce řízení při použití regulátoru  $D(z)$  bude

$$F_w(z) = \frac{0.2058z^{-1} - 0.0335z^{-2} - 0.1150z^{-3}}{1 - 1.9808z^{-1}} + 1.4542z^{-2} - 0.4161z^{-3}$$

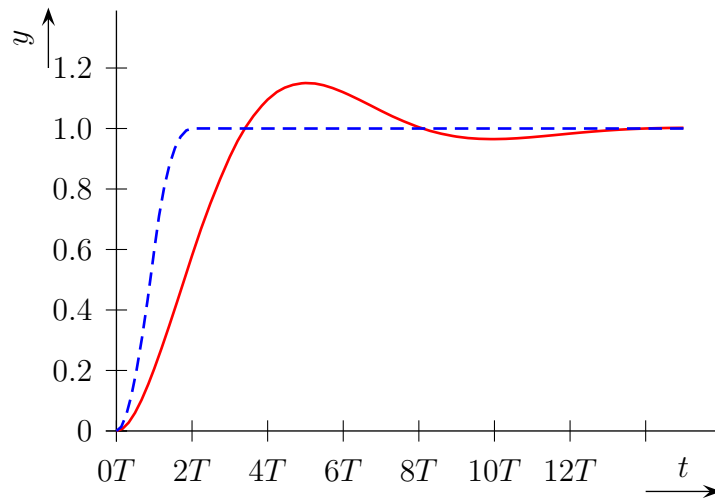
Průběh odezvy na jednotkový skok řízení je nakreslen na obrázku 10.24 plnou čarou. Regulátor navržený podle požadavku konečného přechodného děje by měl přenos

$$\bar{D}(z) = \frac{8.726 - 10.354z^{-1} + 2.6274z^{-2}}{1 - 0.5986z^{-1} - 0.4014z^{-2}}$$

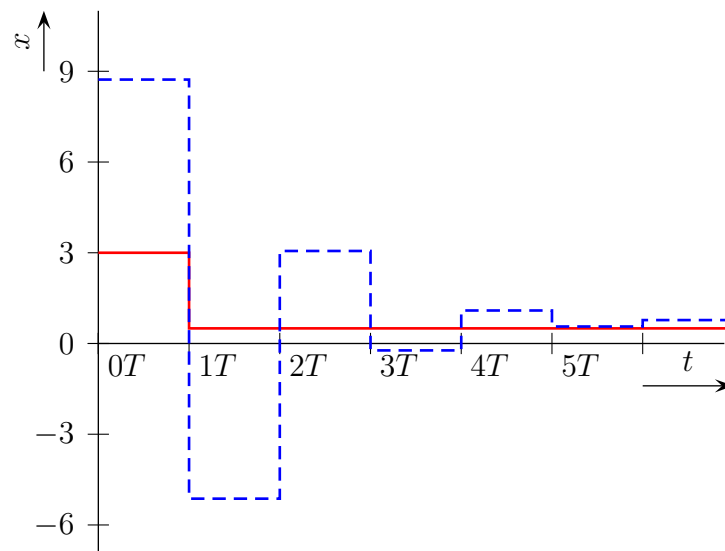
a jemu odpovídající odezva na jednotkový skok řízení je nakreslena na obrázku 10.24 čárkovaně. Pro srovnání jsou na obrázku 10.25 nakresleny impulsové odezvy obou regulátorů.

$$F_w(z) = \frac{0.2058z^{-1} - 0.0335z^{-2} - 0.1150z^{-3}}{1 - 1.9808z^{-1}} + 1.4542z^{-2} - 0.4161z^{-3}$$





Obrázek 10.24: Odezvy regulačních obvodů na jednotkový skok řízení



Obrázek 10.25: Impulsové charakteristiky regulátorů

## 10.5 Shrnutí

Tato kapitola ukazuje jakými různými způsoby se dá navrhnout diskrétní regulátor, čili číslicový korekční člen. V první části jsou prezentovány metody, které umožňují navrhnout číslicový korekční člen, který má konečný přechodný děj. Přechodný děj může být konečný pouze v okamžicích vzorkování, nebo i mimo okamžiky vzorkování. Druhý případ je pro nás častější. Tato metoda vychází ve vhodném zadání přenosu řízení (respektive poruchy). Při tom musíme respektovat podmínky fyzikální realizovatelnosti a další podmínky zajišťující konečný přechodný děj a nulovou ustálenou odchylku. Ve druhé části se kapitola věnuje návrhu jednoduchých typů regulátorů, které mají své analogie ve spojitých regulátorech. Jedná se o kombinace proporcionálního, sumačního a diferenčního regulátoru (regulátory typu PSD). Jsou zde přehledně popsány tři metody, které se pro tento účel mají použít.

## 10.6 Kontrolní otázky

**Otázka 10.1** Jaké znáte způsoby návrhu diskrétních regulátorů?

**Otázka 10.2** Napište omezující podmínku na přenos řízení s ohledem na realizovatelnost regulátoru.

**Otázka 10.3** Můžeme u dynamického systému s ekvivalentním přenosem  $F_c(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$  požadovat přenos řízení roven  $F_w(z) = 1$ ? Svoji odpověď zdůvodněte.

**Otázka 10.4** Odvoďte vzorec pro výpočet přenosu regulátoru  $D(z)$ , pokud znáte ekvivalentní přenos soustavy  $F_c(z)$  a požadovaný přenos řízení je  $F_w(z)$ .

**Otázka 10.5** Jakou podmínku musí splňovat přenos řízení  $F_w(z)$ , aby byla dosažena nulová ustálená odchylka?

**Otázka 10.6** Jakou podmínku musí splňovat přenos řízení  $F_w(z)$ , aby byl dosažen konečný přechodný děj v časech vzorkování a konečný přechodný děj i mezi okamžiky vzorkování

**Otázka 10.7** Pokuste se odpovědět na předchozí otázky s tím, že místo přenosu řízení  $F_w(z)$  uvažujte přenos poruchy  $F_u(z)$

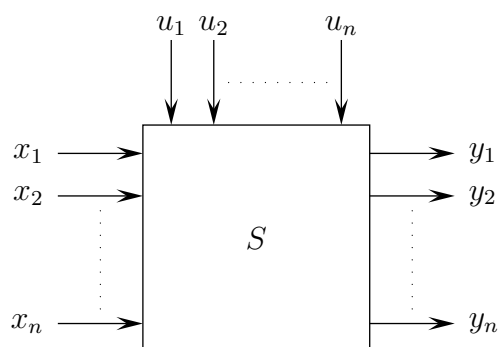
**Otázka 10.8** Napište přenos PSD regulátoru a nakreslete jeho přechodovou charakteristiku a popište ji pomocí proměnných přenosu (napište hodnoty prvních několika vzorků). To stejné můžete vyzkoušet s ostatními typy jednoduchých diskrétních regulátorů  $P$ ,  $S$ ,  $PS$  a  $PD$ .

**Otázka 10.9** Jak se dá nahradit vzorkovač s tvarovačem při návrhu regulátorů v systémech se vzorkováním metodou požadovaného tvaru frekvenční charakteristiky? Odpověď zdůvodněte.

## 11 Vícerozměrné regulační obvody

Regulované soustavy, kterými jsme se dosud zabývali, měly pouze jeden výstup a regulace se týkala pouze jediné regulované veličiny. Té odpovídala také jediná řídicí veličina. Většina regulovaných soustav však má více vstupních veličin, které je třeba regulovat. Na soustavu působí také větší počet akčních veličin, které jsou s výstupními veličinami různě vázány. Proto takové soustavy nelze řešit jako několik oddělených jednoduchých obvodů, navzájem nezávislých. Tyto obvody nazýváme vícerozměrové (dřívější označení bylo víceparametrové) a jejich analýza i syntéza je složitější, než u systémů jednorozměrných. Při spojování vícerozměrných systému zde záleží na pořadí násobení jednotlivých přenosových matic, čímž se modifikují pravidla blokové algebry.

Na obrázku 11.1 je blokově znázorněna vícerozměrová regulovaná soustava. Soustava má  $n$  výstupních veličin  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , stejný počet akčních veličin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a tentýž počet poruch  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Podmínka stejného počtu všech typů veličin není na újmu obecnosti, neboť vždy je možné doplnit menší počet veličin veličinami trvale nulovými. Na druhé straně stejný počet všech proměnných vede na popis čtvercovými maticemi, což je značně výhodné. Mezi jednotlivými akčními a regulovanými veličinami platí následující soustava rovnic:



**Obrázek 11.1:** Vícerozměrová regulovaná soustava

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= S_{11}(p)X_1(p) + S_{12}(p)X_2(p) + \dots + S_{1n}(p)X_n(p) \\
 Y_2(p) &= S_{21}(p)X_1(p) + S_{22}(p)X_2(p) + \dots + S_{2n}(p)X_n(p) \\
 &\vdots \\
 Y_n(p) &= S_{n1}(p)X_1(p) + S_{n2}(p)X_2(p) + \dots + S_{nn}(p)X_n(p)
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

Tuto soustavu napíšeme maticově

$$\mathcal{Y}(p) = \mathcal{S}(p)\mathcal{X}(p)$$

kde  $\mathcal{Y}(p)$  a  $\mathcal{X}(p)$  jsou sloupcové vektory obrazů výstupních a akčních veličin

$$\mathcal{Y}(p) = \begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \\ \vdots \\ Y_n(p) \end{pmatrix} \quad \mathcal{X}(p) = \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_n(p) \end{pmatrix}$$

a  $\mathcal{S}(p)$  je matice přenosů akčních veličin v soustavě

$$\mathcal{S}(p) = \begin{pmatrix} S_{11}(p) & \cdots & S_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n1}(p) & \cdots & S_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

Podobně je tomu s přenosy poruch, pro které zavedeme matici přenosů poruch  $\mathcal{V}(p)$

$$\mathcal{V}(p) = \begin{pmatrix} V_{11}(p) & \cdots & V_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ V_{n1}(p) & \cdots & V_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

a platí

$$\mathcal{Y}(p) = \mathcal{V}(p)\mathcal{U}(p)$$

kde  $\mathcal{U}(p)$  je vektor obrazů poruchových veličin.

Každá regulovaná veličina má svou řídicí veličinu (žádanou hodnotu). Tyto proměnné tvoří vektor žádaných hodnot  $\mathcal{W}(p)$ , jehož obraz je

$$\mathcal{W}(p) = (W_1(p) \quad W_2(p) \quad \cdots \quad W_n(p))^T$$

Rozdíl vektoru žádaných hodnot a vektoru regulovaných veličin tvoří vektor regulačních odchylek  $\mathcal{E}(p)$ , pro který platí

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{W}(t) - \mathcal{Y}(t)$$

Regulační odchylky jsou vstupními veličinami regulátorů jednotlivých obvodů.

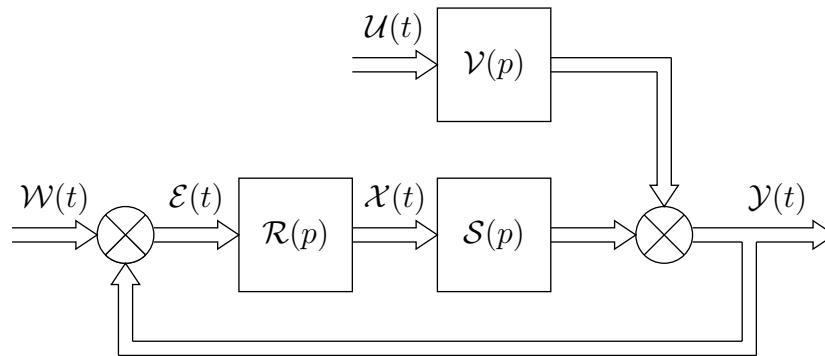
Jedním z hlavních požadavků kladených na vícerozměrové systémy je *autonomnost*. Systém je autonomní tehdy, jestliže změna k-té žádané hodnoty způsobí změnu k-té regulované veličiny a na ostatních se neprojeví. To by bylo splněno za předpokladu, že všechny přenosy  $S_{ij}$ ,  $i \neq j$ , v matici přenosů  $\mathcal{S}$  by byly nulové. Jinými slovy, kdyby matice  $\mathcal{S}$  byla diagonální. Pokud tomu tak není, je třeba nežádoucí vzájemné vazby mezi sobě neodpovídajícími akčními a regulovanými veličinami kompenzovat vhodnými vazbami v regulátorech. Proto obecně každá akční veličina může být vázána na libovolnou regulační odchylku, což vyjádříme maticí přenosů regulátorů  $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) & \cdots & R_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{n1}(p) & \cdots & R_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

Prvek  $R_{ij}(p)$  této matice je definován vztahem

$$R_{ij}(p) = \frac{X_i(p)}{E_j(p)}$$

a znamená přenos  $j$ -té odchylky na  $i$ -tou veličinu. Blokové schéma vícerozměrového regulačního obvodu je na obrázku 11.2.



**Obrázek 11.2:** Blokové schéma vícerozměrového regulačního obvodu

Z rovnic

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(p) &= \mathcal{S}(p) \cdot \mathcal{X}(p) + \mathcal{V}(p) \cdot \mathcal{U}(p) \\ \mathcal{X}(p) &= \mathcal{R}(p) \cdot [\mathcal{W}(p) - \mathcal{Y}(p)] \end{aligned}$$

odvodíme matice přenosů řízení a poruch

$$\mathcal{F}_w(p) = \mathcal{S}(p)\mathcal{R}(p)[\mathbf{I} + \mathcal{S}(p)\mathcal{R}(p)]^{-1} \quad (11.2)$$

$$\mathcal{F}_u(p) = \mathcal{V}(p)[\mathbf{I} + \mathcal{S}(p)\mathcal{R}(p)]^{-1} \quad (11.3)$$

Prvek  $F_{w_{ij}}$  v matici  $\mathcal{F}_w(p)$  znamená přenos  $j$ -té žádané hodnoty na  $i$ -tou regulovanou veličinu. Pro autonomní systém musí platit

$$F_{w_{ij}}(p) = 0 \quad \text{při } i \neq j$$

a matice  $\mathcal{F}_w(p)$  musí být diagonální. Z rovnice (11.2) plyne, že tato podmínka bude splněna, bude-li matice přenosů otevřených smyček

$$\mathcal{F}_0(p) = \mathcal{S}(p)\mathcal{R}(p)$$

maticí diagonální. Tento požadavek samozřejmě neurčuje matici  $\mathcal{R}(p)$  jednoznačně; představuje pouze jednu z podmínek. Další požadavky na prvky matice regulátorů mohou být formulovány buď prostřednictvím žádaného tvaru přenosů otevřených nebo uzavřených smyček. V prvním případě je výpočet regulátoru jednodušší, nebo platí

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{S}^{-1}(p)\mathcal{F}_0(p)$$

kdežto v druhém případě

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{S}^{-1}(p)[\mathbf{I} - \mathcal{F}_w(p)]^{-1}\mathcal{F}_w(p)$$

Pro nalezení požadovaných tvarů matic  $\mathcal{F}_0(p)$  a  $\mathcal{F}_w(p)$  můžeme použít prakticky všechny dříve uvedené metody. Výpočty jsou pouze v odpovídající míře složitější.

Ve většině případů nelze dosáhnout úplnou autonomnost systému. Často se spokojíme pouze s autonomností ustálených stavů. V tom případě musí být splněna podmínka

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{F}_w(p) = \mathcal{D}$$

kde  $\mathcal{D}$  je diagonální matice.

Kromě autonomnosti se u vícerozměrových systémů požaduje též *invariantnost*, což je necitlivost vůči poruchovým signálům. Úplné invariantnosti lze dosáhnout pouze tehdy, je-li k dispozici informace o působících poruchách, čili lze-li poruchové veličiny měřit (viz. kapitola 9.3).

## 11.1 Řízení vícerozměrných obvodů

Při návrhu řídicích algoritmů pro vícerozměrové obvody zůstávají v platnosti všechny postupy, uvedené v předchozích kapitolách. Navíc u těchto obvodů vznikají další požadavky, které můžeme splnit dalším rozšířením polynomů přenosových funkcí. Zde uvedeme požadavky autonomnosti a invariantnosti u vícerozměrových systémů. Na regulovanou soustavu s  $n$  výstupními veličinami  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  působí  $n$  akčních veličin  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a stejný počet poruchových veličin  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Předpoklad stejného počtu vstupních, výstupních i poruchových veličin není na újmu obecnosti, neboť skutečný počet veličin lze vždy doplnit na potřebné číslo pomocí trvale nulových proměnných. Pro vzájemné přenosy jednotlivých veličin zavedeme značení

$$S_{ij} = \frac{Y_i}{X_j} \quad ; \quad R_{ij} = \frac{Y_i}{U_j}$$

Protože všechny akční veličiny (výstupy řídicího počítače) jsou tvarovány, budeme předpokládat, že platí symbolika

$$S_{ij}(z, m) = {}_m \{S_{i,j}(p)F_{TV}(p)\} \quad ; \quad R_{ij}(z, m) = {}_m \{R_{i,j}(p)U_j(p)\} \frac{1}{U_j(z)}$$

Vidíme, že přenosy  $R_{ij}$  budou opět funkcemi tvaru poruchového signálu  $u(t)$ . Podle obrázku ..., na kterém je nakresleno obecné schéma vícerozměrového obvodu, platí

$$\begin{aligned} Y_1 &= S_{11}X_1 + S_{12}X_2 + \dots + S_{1n}X_n + R_{11}U_1 + R_{12}U_2 + \dots + R_{1n}U_n \\ Y_2 &= S_{21}X_1 + S_{22}X_2 + \dots + S_{2n}X_n + R_{21}U_1 + R_{22}U_2 + \dots + R_{2n}U_n \\ &\vdots \\ Y_n &= S_{n1}X_1 + S_{n2}X_2 + \dots + S_{nn}X_n + R_{n1}U_1 + R_{n2}U_2 + \dots + R_{nn}U_n \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu jsou vynechány symboly obrazové proměnné  $z$ . Pro jednotlivé regulační odchylky platí

$$e_i = w_i - y_i$$

a pro přenosy korekčních členů platí

$$D_{ij}(z) = \frac{X_i(z)}{E_j(z)}$$

Potom celý soubor řídicích algoritmů je popsán soustavou rovnic

$$\begin{aligned} X_1 &= D_{11}E_1 + D_{12}E_2 + \cdots + D_{1n}E_n \\ X_2 &= D_{21}E_1 + D_{22}E_2 + \cdots + D_{2n}E_n \\ &\vdots \\ X_n &= D_{n1}E_1 + D_{n2}E_2 + \cdots + D_{nn}E_n \end{aligned}$$

Zápis soustav rovnic pro  $X_n$  i  $Y_n$  zjednodušíme, použijeme-li maticového počtu. Přenosy  $S_{ij}$  i  $R_{ij}$  vytvoří čtvercové matice, proměnné  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $U_i$  a  $R_i$  tvoří sloupcové matice. Rovnice systému zapíšeme ve tvaru

$$\mathcal{Y} = \mathcal{S}\mathcal{X} + \mathcal{R}\mathcal{U} = \mathcal{S}\mathcal{D}(\mathcal{W} - \mathcal{Y}) + \mathcal{R}\mathcal{U}$$

Matice přenosových funkcí řízení bude

$$\mathcal{F}_w = (\mathcal{I} + \mathcal{S}\mathcal{D})^{-1}\mathcal{S}\mathcal{D}$$

a matice přenosů poruch

$$\mathcal{F}_u = (\mathcal{I} + \mathcal{S}\mathcal{D})^{-1}\mathcal{R}$$

System je autonomní tehdy, jestliže změna  $i$ -té řídicí veličiny ovlivní pouze  $i$ -tou výstupní veličinu, kdežto na ostatních výstupech se tato změna neprojeví. System bude autonomní, pokud bude platit  $F_{w_{i,j}}(z, m) = 0$  pro všechna  $i \neq j$ . Matice přenosů  $\mathcal{F}_w(z, m)$  musí být diagonální.

$$\mathcal{F}_w(z, m) = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{nn} \end{pmatrix}$$

Ve vzorci pro matici přenosových funkcí  $\mathcal{F}_w$  se v čitateli i jmenovateli vyskytuje součin matic  $\mathcal{S}\mathcal{D}$ . Pokud bude tento součin diagonální matice, pak také její součet s jednotkovou maticí a inverze takto vzniklé matice bude diagonální matice. Inverzní matice k diagonální matici je opět diagonální matice. Postačující podmínkou autonomnosti proto bude, aby součin matic  $\mathcal{S}\mathcal{D}$  byl diagonální maticí.

## 11.2 Shrnutí

V této kapitole jsme nastínili problematiku vícerozměrových regulačních obvodů. Vysvětlili jsme si pojmy autonomnost a invariantnost. V případě, kdy je systém autonomní, nebo se ho podaří vhodnou transformací na takovýto systém převést, řeší se návrh regulátoru odděleně, postupně pro každý přenos zvlášť pomocí metod popsanych dříve. Tato kapitola slouží pouze jako stručný úvod do řízení vícerozměrových systémů. S podrobnějším popisem se zřejmě setkáte v některém z navazujících kurzů.

## 11.3 Kontrolní otázky

**Otázka 11.1** *Jaká jsou pravidla pro blokovou algebru vícerozměrových obvodů? V čem se liší od jednorozměrných systémů?*

**Otázka 11.2** *Definujte pojem autonomnosti.*

**Otázka 11.3** *Jaký je rozdíl mezi statickou a dynamickou autonomností?*

**Otázka 11.4** *Definujte pojem autonomnosti vícerozměrového regulačního obvodu.*

**Otázka 11.5** *Jaký je rozdíl mezi absolutní a selektivní invariantností?*



## A Odpovědi na kontrolní otázky

## B Základy z maticového počtu a zpracování signálů

### B.1 Algebraický doplněk

Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Pokud z matice  $\mathbf{A}$  vynecháme  $i$ -tý řádek a  $j$ -tý sloupec, dostaneme matici, kterou si označíme  $\mathbf{M}_{ij}$ . Číslo  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij})$  se nazývá algebraický doplněk prvku  $a_{ij}$  v matici  $\mathbf{A}$ , nebo také subdeterminant.

**Příklad B.1** Vypočítejte algebraický doplněk  $A_{23}$ , pokud je matice  $\mathbf{A}$  dána

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynecháme druhý řádek a třetí sloupec matice  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{M}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Algebraický doplněk je podle definiční rovnice  $A_{23} = (-1)^{2+3} \det(\mathbf{M}_{23}) = 6$

### B.2 Adjungovaná matice

Adjungovaná matice ke čtvercové matici  $\mathbf{A}$  se určí tím způsobem, že se jednotlivé prvky  $a_{ij}$  nahradí algebraickými doplňky  $A_{ij}$  a potom se tato matice transponuje.

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

**Příklad B.2** Vypočítejte adjungovanou matici k matici  $\mathbf{A}$  z předchozího příkladu

Nejprve si vypočítáme všechny Algebraické doplňky

$$\begin{aligned} A_{11} &= \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = -43 & A_{12} &= -\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = 38 & A_{13} &= \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -3 \\ A_{21} &= -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = 22 & A_{22} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = -20 & A_{23} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 6 \\ A_{31} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -3 & A_{32} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 6 & A_{33} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3 \end{aligned}$$

Nyní můžeme spočítat adjungovanou matici  $\text{adj}(\mathbf{A})$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -43 & 38 & -3 \\ 22 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -43 & 22 & -3 \\ 38 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

### B.3 Inverzní matice

Pokud existuje inverzní matice k matici  $\mathbf{A}$ , pak musí splňovat rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice. Jednotková matice má jedničky na hlavní diagonále, jinde má samé nuly. Matice  $\mathbf{A}$  musí být čtvercová a její determinant musí být nenulový (matice nemůže být singulární). Inverzní matice se dá vypočítat podle vzorce

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} \quad (\text{B.1})$$

**Příklad B.3** Vypočítejte inverzní matici k matici  $\mathbf{A}$

Adjungovanou matici jsme si spočítali v předchozím příkladě. K výpočtu inverzní matice zbývá určit determinant matice  $\mathbf{A}$ .

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 8 \cdot 1 = 24$$

Inverzní matice k matici  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -43 & 22 & -3 \\ 38 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

**Příklad B.4** Ověřte správnost výpočtu determinantu a inverzní matice k matici  $\mathbf{A}$  v Matlabu.

Nadefinujeme si matici  $\mathbf{A}$

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 1]
```

```
A =
```

```

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     1
```

Determinant získáme zavoláním funkce

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```

    24
```

Inverzní matice násobená determinantem je

```
inv(A)*det(A)
```

```
ans =
```

```
-43.0000    22.0000   -3.0000
 38.0000   -20.0000    6.0000
 -3.0000    6.0000   -3.0000
```

Výsledky se shodují, počítali jsme správně.

## B.4 Vlastní čísla matice

Někdy je potřebné najít skalár  $\lambda$  a vektor  $\mathbf{x}$  spojené s maticí  $\mathbf{A}$  tak, že je splněna rovnice:

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Pokud je matice  $\mathbf{A}$  řádu  $n$ , pak se dá nalézt  $n$  koeficientů  $\lambda_i$ , které vyhovují předchozí rovnici. Hodnoty koeficientů  $\lambda_i$  se nazývají **Vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$** . Vlastní čísla nalezneme řešením rovnice

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

K určenému vlastnímu číslu  $\lambda_i$  můžeme nalézt vektor  $\mathbf{x}_i$  splňující rovnici

$$[(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{x}_i = 0$$

Vypočtený vektor  $\mathbf{x}_i$  se nazývá vlastní vektor. Jeho určení není jednoznačné, což plyne z toho, že je determinat  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$  nulový.

Někdy se vlastní čísla zapisují do vektoru, který nazýváme vektor vlastních čísel. To **není** stejné jako vlastní vektor.

**Příklad B.5** *Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Nejprve určíme determinant

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3) \quad (\text{B.2})$$

Získáváme dvě vlastní čísla  $\lambda_1 = -1$  a  $\lambda_2 = -3$ . Nyní vypočítáme vlastní vektory  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Pokud bude  $x_{12} = 0$ , bude rovnice splněna pro libovolné  $x_{11}$ . Můžeme si zvolit například  $x_{11} = 1$  Druhý vlastní vektor  $\mathbf{x}_2$  určíme podobně řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

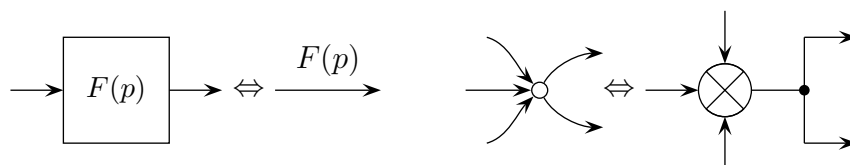
Na základě prvního řádku můžeme psát, že prvky vlastního vektoru musí splňovat rovnici  $x_{21} = -x_{22}$ , takže například  $x_{21} = 1$  a  $x_{22} = -1$ .

## B.5 Masonovo pravidlo pro určení přenosu

Masonovo pravidlo nám umožňuje pomocí jednoduchého algoritmu určit přenos prakticky libovolně složitého schématu. Pravidla pro postupné zjednodušování umožňují taktéž dojít ke stejnému výsledku. Jejich nevýhodou ale je, že jsou obtížně algoritmizovatelné a vyžadují hodně psaní a překreslování.

### B.5.1 Převod blokového diagramu na graf signálových toků

Masonovo pravidlo se používá pro získání přenosu grafu signálových toků. Graf signálových toků se skládá ze dvou základních elementů, kterými jsou větev a uzel. To je poněkud zjednodušené pojetí na které jsme zvyklí z blokových diagramů, kde se vyskytují bloky a sumátory, které jsou vzájemně pospojovány vazbami. Přejít od blokových diagramů ke grafu signálových toků není nijak obtížný. Sumátory i rozvětvení se nahradí uzly. Části schémat mezi dvěma uzly se nahradí výsledným přenosem, který pak představuje větev. Pokud daná část schématu vstupuje do sumátoru se záporným znaménkem, pak se výsledný přenos vynásobí  $-1$ . Je důležité podotknout, že stejně jako v blokovém schématu jsou u větví zadávány směry průchodu signálu.

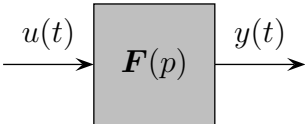
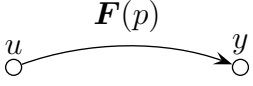
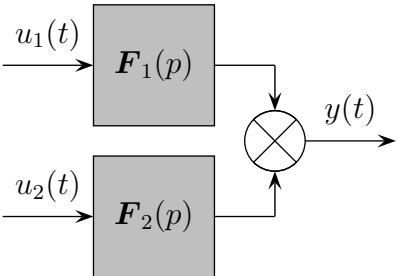
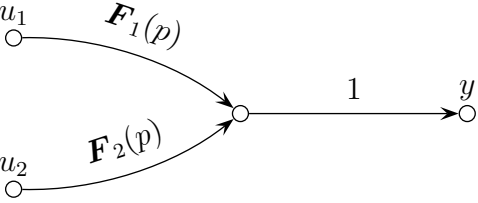
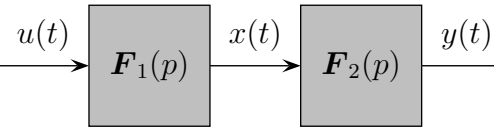
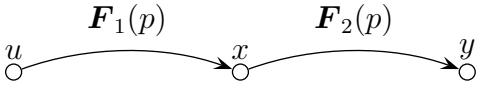
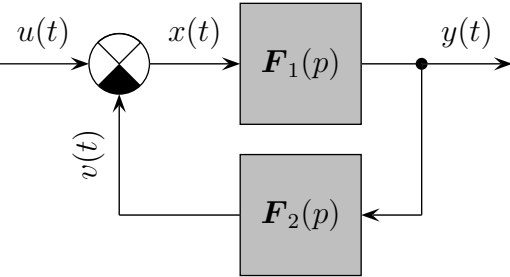
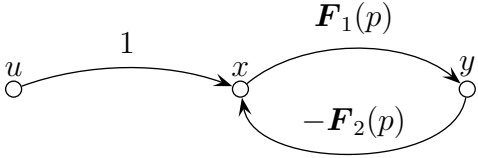
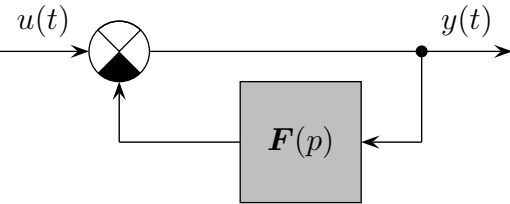
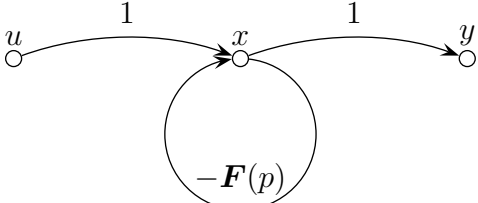


Obrázek B.1: Prvky grafu signálových toků

Převodem blokového diagramu na graf signálových toků se sníží počet použitých elementů.

### B.5.2 Základní pojmy

Předtím než napíšeme Masonovo pravidlo, které se používá k výpočtu přenosu, je nutné zavést některé pojmy. **Přímá větev** je jakákoliv posloupnost větví ze vstupu na výstup ve směru šipek, která neprochází žádným uzlem více než jednou. Protože jich může být více, číslovají se indexem. Pořadí není důležité. **Přenos přímé větve** je součin přenosů všech větví, které jsou obsaženy v dané přímé větvi. Přenos budeme označovat  $V_i$ , kde  $i$  je index přímé větve. **Smyčka** je jakákoliv uzavřená posloupnost větví ve směru šipek, která neprochází žádným uzlem více než jednou. **Přenos smyčky** je součin přenosů všech větví obsažených ve smyčce. Říkáme, že se dvě smyčky **dotýkají**, pokud mají nějaký společný uzel. Jinak říkáme, že se **nedotýkají**. Stejně tak je to s dotýkáním či nedotýkáním u

Blokové schéma	Graf signálových toků
	
	
	
	
	

**Tabulka B.1:** Vztah mezi jednoduchými blokovými schématy a signálovými diagramy

přímých větví. **Determinant** grafu signálových toků  $\Delta$  se určí jako

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - \text{součet přenosů smyček} \\ & + \text{součet součinů přenosů kombinací dvou vzájemně nedotýkajících se smyček} \\ & - \text{součet součinů přenosů kombinací tří vzájemně se nedotýkajících se smyček} \\ & + \dots \end{aligned}$$

**Subdeterminant**  $i$ -té přímé větve je determinant  $\Delta_i$  grafu signálových toků získaného tak, že se z původního grafu vymažou všechny smyčky, které se dotýkají  $i$ -té přímé větve.

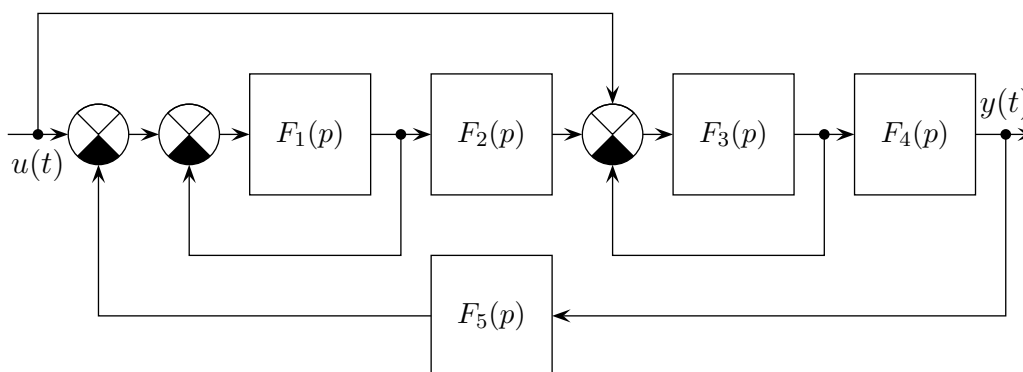
### B.5.3 Masonovo pravidlo pro výpočet přenosu

Nyní máme nadefinované všechny potřebné pojmy k tomu, abychom napsali **Masonovo pravidlo** pro výpočet přenosu grafu signálových toků. Přenos systému s jedním vstupem a jedním výstupem popsaného grafem signálových toků se určí podle rovnice:

$$G(s) = \frac{V_1\Delta_1 + V_2\Delta_2 + \dots}{\Delta}$$

Pro systémy s více vstupy a více výstupy se Masonovo pravidlo jednoduše postupně aplikuje na všechny kombinace vstupů a výstupů.

**Příklad B.6** Určete přenos blokového schématu z obrázku B.2. Nejprve převed'te blokové schéma na graf signálových toků a potom využijte Masonova pravidla pro výpočet přenosu.

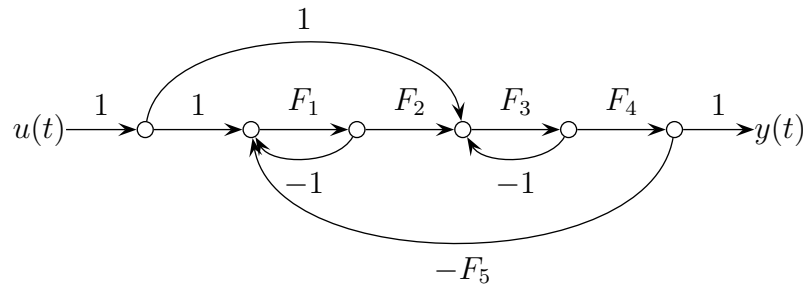


Obrázek B.2: Blokový diagram

Graf signálových toků odpovídající blokovému schématu B.2 je ukázáno na obrázku B.3.

Graf signálových toků obsahuje dvě přímé větve a tři smyčky. Nejprve určíme přenosy obou větví a jejich subdeterminanty

$$\begin{aligned} V_1 &= F_1F_2F_3F_4 & \Delta_1 &= 1 \\ V_2 &= F_3F_4 & \Delta_2 &= 1 + F_1 \end{aligned}$$



**Obrázek B.3:** Graf signálových toků získaný z blokového diagramu

Determinant celého grafu

$$\Delta = 1 + F_1 + F_3 + F_1F_2F_3F_4F_5 + F_1F_3$$

Výsledný přenos

$$F(p) = \frac{V_1\Delta_1 + V_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{F_1F_2F_3F_4 + F_3F_4(1 + F_1)}{1 + F_1 + F_3 + F_1F_2F_3F_4F_5 + F_1F_3}$$

## B.6 Laplaceova transformace

Pro řešení lineárních spojitých systémů používáme Laplaceovu transformaci, protože je to snazší, než řešení diferenciálních rovnic. Laplaceova transformace převádí funkci času  $f(t)$  na funkci  $F(p)$  operátoru  $p$ . Definiční vzorec pro Laplaceovu transformaci je

$$\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (\text{B.5})$$

Laplaceův operátor je komplexní číslo  $p = \sigma + j\omega$ .

## B.7 Inverzní Laplaceova transformace

Po provedení výpočtu v Laplaceově transformaci nás zajímá časový průběh odpovídající získanému operátorovému přenosu. Pro převod operátorového přenosu do časové oblasti se používá inverzní Laplaceova transformace. Jejím použitím získáme funkci pro  $t \geq 0$ .

$$^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (\text{B.6})$$

Proměnná  $\sigma$  definuje pozici přímky v komplexní rovině, která je rovnoběžná s imaginární osou. Při výpočtu musí všechny póly přenosu  $F(p)$  ležet nalevo od této přímky. Inverzní Laplaceova transformace se může vypočítat použitím Reziduové věty jako suma reziduí funkce  $F(p)e^{pt}$ .

$$^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum_{i=1}^N \operatorname{res}_{p=p_i} [F(p)e^{pt}] \quad (\text{B.7})$$



kde  $N$  je počet reziduí.

Funkce  $F(p)e^{pt}$  má rezidua ve všech pólech přenosu  $F(p)$ . Požadavkem je, aby měl přenos  $F(p)$  více pólů než nul. Reziduum v jednoduchém pólu  $p_i$  se určí výpočtem limity

$$\operatorname{res}_{p=p_i} [F(p)e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) F(p) e^{pt} \quad (\text{B.8})$$

Pokud chceme určit reziduum funkce  $F(p)$  ve vícenásobném ( $k$ -násobném) pólu  $p_i$ , musíme pro jeho výpočet použít složitější vzorec

$$\operatorname{res}_{p=p_i} [F(p)e^{pt}] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} [(p - p_i)^k F(p) e^{pt}] \quad (\text{B.9})$$

**Příklad B.7** Vypočítejte reziduum funkce  $F(p)e^{pt}$ , kde  $F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)^2}$  v bodě  $p = 0$ .

Použitím vzorce (B.8) pro jednoduchý kořen, kde za  $p_i$  dosadíme 0

$$\operatorname{res}_{p=0} [F(p)e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p+2}{(p+1)^2} e^{pt} = \frac{2}{1^2} e^{0t} = 2$$

**Příklad B.8** Vypočítejte reziduum funkce  $F(p)e^{pt}$ , kde  $F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)^2}$  v bodě  $p = -1$ .

Použitím vzorce (B.9) pro vícenásobný kořen, kde za  $p_i$  dosadíme -1 a za  $k$  2, protože kořen  $p_i = -1$  je dvojnásobný

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=-1} [F(p)e^{pt}] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} [(p+1)^2 \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \frac{p+2}{p} e^{pt} = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left( e^{pt} + \frac{2e^{pt}}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow -1} \left( te^{pt} + \frac{2pte^{pt} - 2e^{pt}}{p^2} \right) = \\ &= te^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} = -te^{-t} - 2e^{-t} \end{aligned}$$

**Příklad B.9** Vypočítejte inverzní Laplaceovu transformaci přenosu  $F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)^2}$  pomocí reziduové věty.

Funkce  $F(p)e^{pt}$  má rezidua v bodech  $p_1 = 0$  a  $p_2 = -1$ . Hodnoty těchto reziduí jsou vypočítány v předchozích dvou příkladech. Dosazením do definičního vztahu pro inverzní Laplaceovu transformaci

$$\begin{aligned} {}^{-1}\{F(p)\} = f(t) &= \sum_{i=1}^N \operatorname{res}_{p=p_i} \left[ \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} \right] = \\ &= \operatorname{res}_{p=0} \left[ \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} \right] + \operatorname{res}_{p=-1} \left[ \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} \right] = 2 - te^{-t} - 2e^{-t} \end{aligned}$$

**Příklad B.10** Pomocí programu Matlab a jeho toolboxu pro symbolickou matematiku určete zpětnou Laplaceovu transformaci přenosu z předcházejícího příkladu.

Nejprve musíme nadefinovat používané proměnné  $p$  a  $t$ . To se provede pomocí příkazu

```
>> syms p t
```

Potom zavedeme přenos  $F(p)$

```
>> Fp=(p+2)/p/(p+1)^2
```

```
Fp =
```

```
(p+2)/p/(p+1)^2
```

Pro inverzní Laplaceovu transformaci slouží příkaz `ilaplace`

```
>> ft = ilaplace(Fp,p,t)
```

```
ft =
```

```
2-t*exp(-t)-2*exp(-t)
```

Jako první parametr se zadává přenos, který se má převést, druhý parametr je označení Laplaceova operátoru a třetí proměnná je označení pro čas. Podstatné je skutečnost, že jsme v obou případech, tedy výpočtem i v Matlabu, dostali stejný výsledek.

## B.8 Fourierova transformace

Fourierova transformace převádí signál z časové oblasti do frekvenční oblasti pomocí vzorce

$$\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B.10})$$

Pokud je  $f(t) = 0$  pro  $t < 0$  a  $f(0^+)$  vyjadřuje počáteční podmínku pro  $f(t)$ , pak vzorec B.10 přejde na stejný tvar, jako má definiční vzorec Laplaceovy transformace s proměnnou  $p = j\omega$ .

Inverzní Fourierova transformace má definiční vztah

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{B.11})$$

## Index

- Amplitudová bezpečnost, 117, 118
- Aproximace
  - Padého rozvojem, 38
  - regulovaných soustav, 36
- Autonomnost, 195
- Bilineární transformace, 71
- Cauchyho teorém, 74
- Charakteristická rovnice, 72
- Charakteristický polynom, 72
- Dopravní zpoždění, 37
- Frobeniův kanonický tvar, 25
- Fyzikální realizovatelnost, 162, 178
- Fázová bezpečnost, 117, 118
- Graf signálových toků, 204
  - determinant, 206
  - Masonovo pravidlo, 206
  - přímá větev, 204
  - smyčka, 204
  - subdeterminant, 206
- Identifikace, 35
- Integrální kritéria, 93
  - ITAE, 103
  - kvadratické, 95
  - lineární, 93
- Integrální kritérium
  - kvadratické, 142
- Invariantnost, 197
- Jordanův kanonický tvar, 26
- Kanonický tvar
  - Frobeniův, 25
  - Jordanův, 26
- Kompensace dopravního zpoždění, 159
- Konečný přechodný děj, 163, 179
- Kořenový hodograf, 106
  - počátky a konce větví, 109
  - průsečík s reálnou osou, 113
  - segmenty na reálné ose, 109
  - směr asymptot, 110
  - střed asymptot, 111
  - větve, 106
- Kritické
  - perioda, 143
  - zesílení, 143
- Kritérium
  - Hurwitzovo, 72
  - Nyquistovo, 74, 77
  - Routh-Schurovo, 72, 86
    - Nekolného doplněk, 97
  - zjednodušené Nyquistovo, 84, 87
- lineární systém, 10
- M-kružnice, 122
- Masonovo pravidlo, 204, 206
- Matice
  - adjungovaná, 201
  - algebraický doplněk, 201
  - impulsních charakteristik, 21
  - inverzní, 202
  - přenosových funkcí, 20, 23
  - vlastní čísla, 71, 203
- Metoda
  - inverzní regulátor, 133
  - optimálního modulu, 135
  - optimálního časového průběhu, 141
  - požadovaného rozložení pólů uzavřeného obvodu, 145
  - standardních tvarů charakteristického polynomu, 149
  - standardních tvarů frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu, 126
  - Zieglera-Nicholse, 142
- Mez stability, 143
- MIMO systémy, 9
- N-kružnice, 122
- Nyquistovo kritérium, 74, 77

- Otevřená smyčka, 57  
ovládání, 11
- Padého aproximace, 38  
princip superpozice, 10
- Programování  
paralelní, 25  
přímé, 24  
sériové, 26
- Přenos  
akční veličiny, 60  
odchylky, 59  
otevřené smyčky, 57  
poruchy, 58  
vstupní veličiny regulátoru, 59  
řízení, 58
- Realizační časová konstanta, 47
- Regulační odchylka, 57
- Regulátor  
akční člen, 13  
amplitudová a fázová frekvenční charakteristika, 51  
diskrétní, 11, 53  
frekvenční charakteristika, 50  
integrační, 45  
P, S, PS, PD a PSD, 183  
PD, 45  
PI, 46  
PID, 46  
proporcionální, 45  
přechodová charakteristika, 49  
přímočinný, 10  
s pomocnou energií, 10  
se dvěma korekčními členy, 182  
se dvěma stupni vlonosti, 134  
spojitý, 11  
výkonový zesilovač, 13  
ústřední člen, 13
- Residuová věta, 96
- Reziduová věta, 207
- Rozvětvený regulační obvod  
s modelem soustavy, 158  
s měřením poruchy, 156  
s pomocnou akční veličinou, 155  
s pomocnou regulovanou veličinou, 152
- Servomechanismus, 153
- SISO systémy, 9
- Soustava  
fázově minimální, 34  
fázově neminimální, 34  
kmitavá, 32  
přetlumená, 31  
s a bez astatismu, 34
- Stabilita  
definice, 71
- Stavový popis, 15  
stav systému, 15  
stavové rovnice, 16  
stavový vektor, 15  
transformace stavů, 22  
vektor vstupů, 16  
vektor výstupů, 16
- Transformace  
Fourierova, 209  
inverzní Fourierova, 209  
inverzní Laplaceova, 207  
Laplaceova, 207  
stavů, 22
- Tvarovač, 161
- Ustálené odchylky, 65
- Věta  
o konečné hodnotě, 65
- Vícerozměrné obvody, 194, 197
- Zásoba stability  
v amplitudě, 117  
v modulu, 117  
ve fázi, 117  
ve zpoždění, 118
- Řízení  
dynamických systémů, 9  
na konstantní hodnotu, 11  
programové, 11  
sekvenční, 9  
servomechanismus, 11

## Reference

- [1] G. H. Hostetter, C. J. Savant, and R. T. Stefani, *Design of Feedback Control Systems*, 2nd ed. Saunders College Publishing, 1989.
- [2] I. D. Landau, *Identification et commande des systèmes*. Hermès, Paris, 1993.
- [3] P. Vavřín, *Teorie dynamických systémů*. Vysoké učení technické v Brně, 1989.
- [4] K. Rektorys, *Přehled užití matematiky I a II*, šesté vydání ed. Praha: Prometheus, 1995.
- [5] P. Vavřín, *Teorie automaticého řízení I*. Vysoké učení technické v Brně, 1991.
- [6] C. C. Hang, A. P. Loh, and V. U. Vasnani, “Relay feedback auto-tuning of cascade controllers,” *ieetcst*, vol. 2, no. 1, pp. 42–45, March 1994.
- [7] C. C. Hang, “The choice of controller zeros,” *ieeescm*, pp. 72–75, January 1989.
- [8] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. Macmillan, 1992.
- [9] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall, 1997.