

Optické 3D měření

Ilona Kalová



Rozvrh přednášky:

1. Metody 3D rekonstrukce.
2. Orientace v prostoru.
3. Reprezentace těles.
4. Geometrické transformace ve 3D.

Optické 3D měření

Ilona Kalová



Rozvrh přednášky:

1. **Metody 3D rekonstrukce.**
2. Orientace v prostoru.
3. Reprezentace těles.
4. Geometrické transformace ve 3D.

Úvod

► Výhody optického měření

- přesnost, rychlost, nekontaktní, nedestruktivní měření, neunavitelnost, snadná přenastavitelnost, změna parametrů, ...

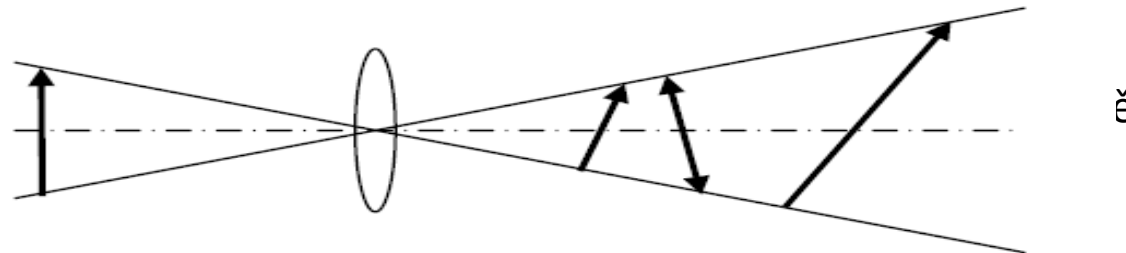
► Aplikace

- rozpoznání 3D předmětů (třízení), sestavení 3D modelu, inspekce kvality, kontrola povrchů, vizuální systémy na montážních linkách, navigace, robotika, zabezpečování objektů

► Ztráta informace díky perspektivní projekci

- běžné měřicí i zobrazovací zařízení (CCD kamera, monitor) *transformují 3D scénu na 2D obraz* → dochází ke *ztrátě jedné souřadnice* (z. hloubka, vzdálenost)

- zpětná úložná vlastnost nekonečně



► 3D vidění člověka

- člověk neztrácí 3D interpretaci okolí - využívá spojování obrazů ze dvou pohledů (očí), stínů či pozorování těles při pohybu, obecné předběžné znalosti světa atd.

Úvod

• Tři hlavní principy:

1. triangulace

2. optická interferometrie

3. měření doby letu modulovaného světla

• ◊ tom, která metoda se použije rozhoduje:

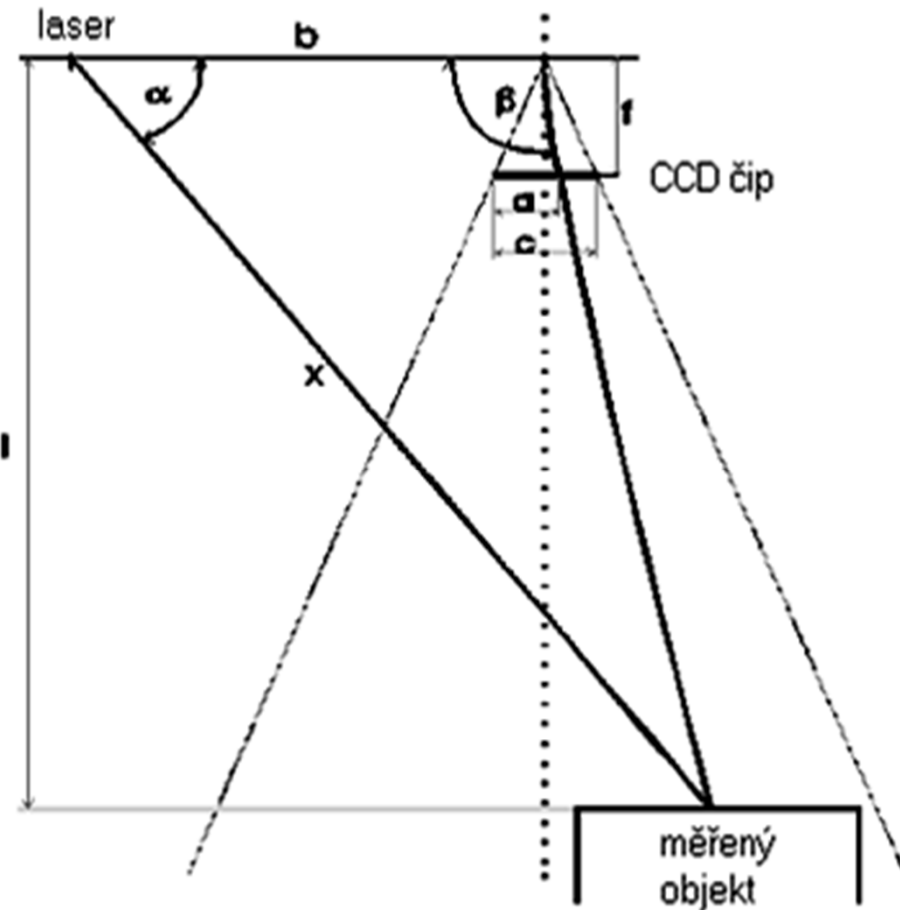
- vzdálenost zkoumaného předmětu od senzorů, jeho rozměry a požadovaná přesnost měření
- vlastnosti povrchu předmětu (nerovnost, drsnost, odrazivost světla)
- přístupnost k měřenému objektu a maximální možné rozměry měřicího systému (aby jej bylo možné umístit například na již fungující linku)
- vlastnosti okolních zdrojů světla (intenzita, spektrum, koherence),
- možná doba měření, možnost kalibrace
- finanční stránka atd.

Triangulační metody

- v počítačovém vidění nejpoužívanější techniky optického měření
- rozlišujeme tyto nejdůležitější techniky:
 - 1.1 aktivní triangulace
 - 1.2 pasivní triangulace
 - 1.3 měřicí systémy s teodolity
 - 1.4 fokusovací techniky
 - 1.5 techniky „podoba ze stínování“
 - 1.6 další techniky např. „podoba ze siluety“, „podoba z pohybu“, „podoba z textury“ atd.

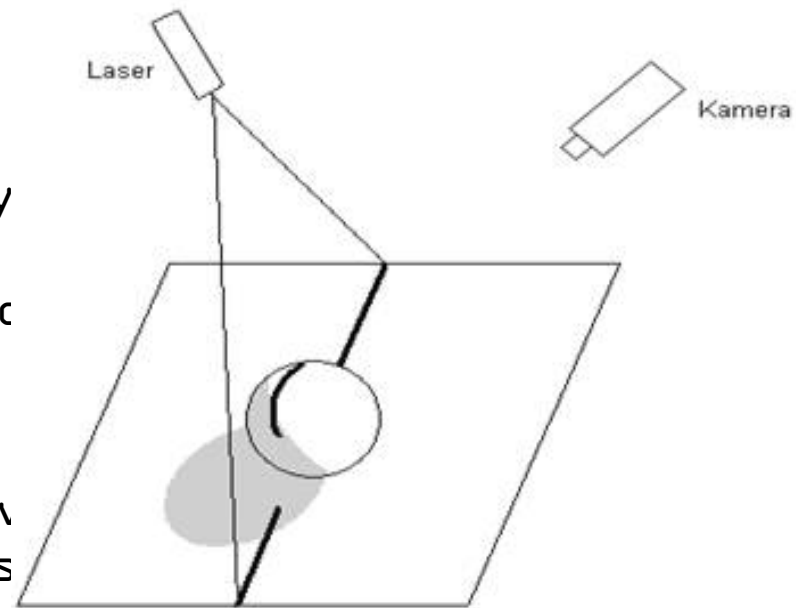
Aktivní triangulace

- ▶ fotogrammetrická rekonstrukce snímaného objektu nasvícením jeho povrchu světelným zdrojem a současným snímáním snímačem
- ▶ *triangulační trojúhelník* - zdroj světla, snímač a osvětlený bod
- ▶ *triangulační báze* (základna) - spojnice b světelný zdroj a snímač
- ▶ úhel α svíraný s triangulační bází je neměnný, kdežto úhel β je určen proměnnou pozicí vysvíceného bodu CCD snímače
- ▶ z velikosti úhlu β a na základě znalosti triangulační báze a parametrů kamery lze určit z -ovou souřadnici objektu (vzdálenost l)



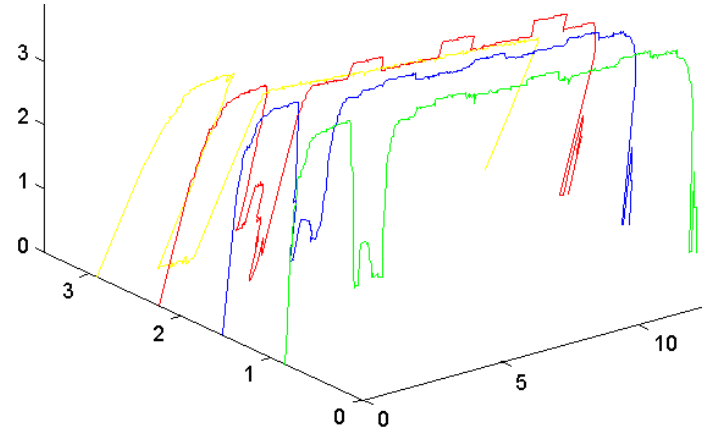
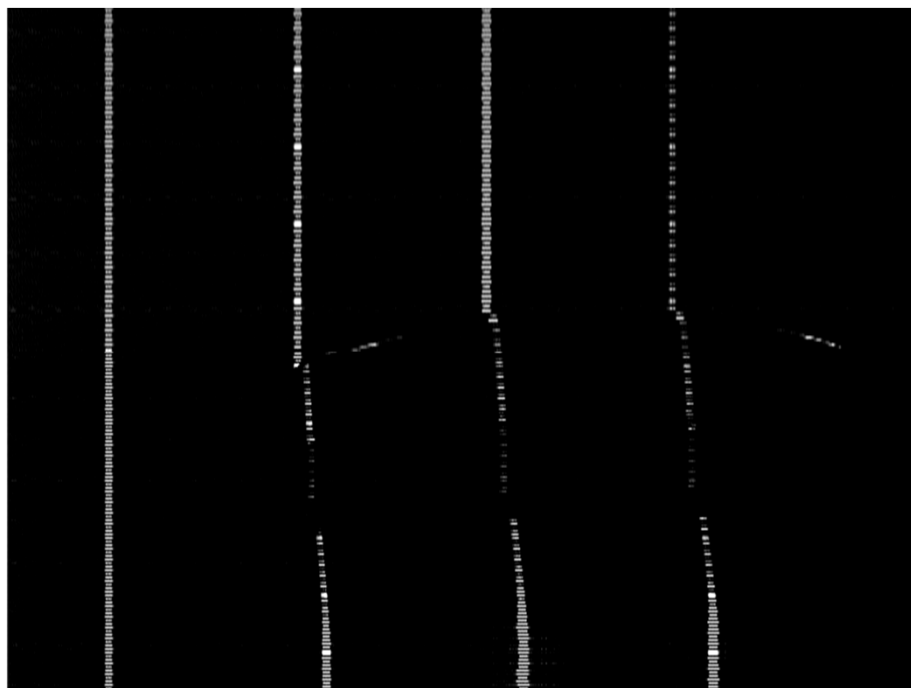
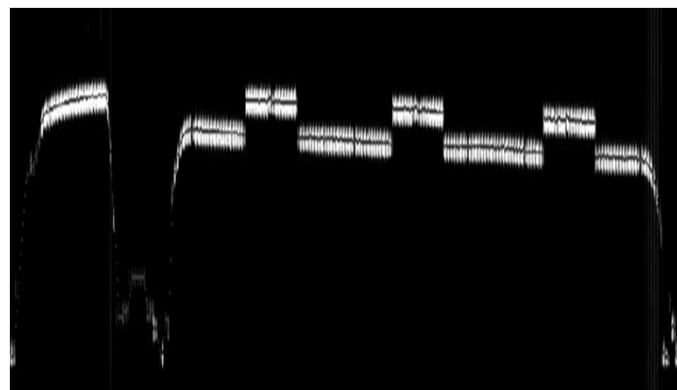
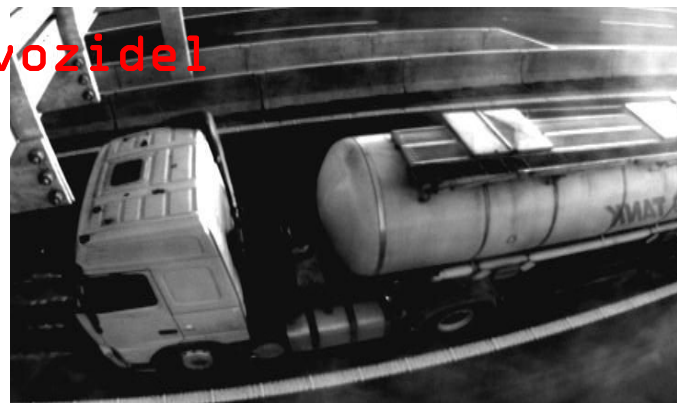
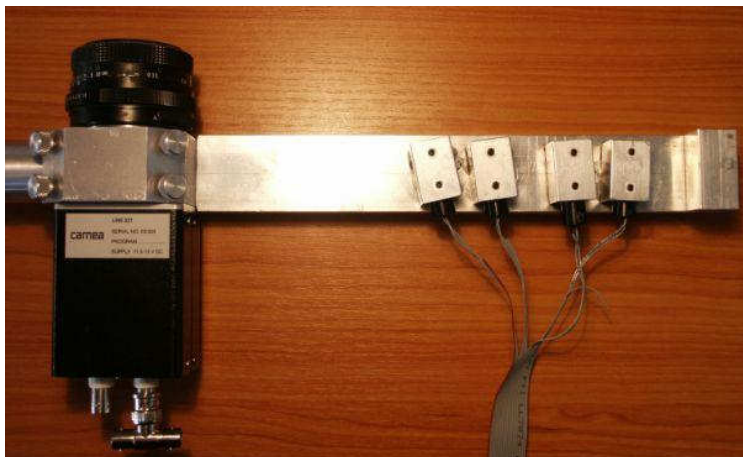
Aktivní triangulace

- ▶ Rozlišení závisí na: měřené vzdálenosti, velikosti báze b , úhlu α , rozlišení kamery, ohniskové vzdálenosti f objektivu
- ▶ K označení povrchu se používá:
 - světelný paprsek - 1D triangulace
 - světelný pruh - 2D triangulace
 - strukturovaný světelný svazek - 3D triangulace
 - technika světelného vzoru
 - technika barevného kódu
 - technika moiré
 - technika fázového posuvu
- ▶ Snímání - podle zvolené techniky
 - plošná X řádková kamera
 - jeden snímek X postupné skenování
- ▶ Úskalí metody:
 - konkavity objektu
 - plochy kolmé na obrazovku
 - plochy rovnoběžné ke zdroji světla
 - povrch (materiál, barva)



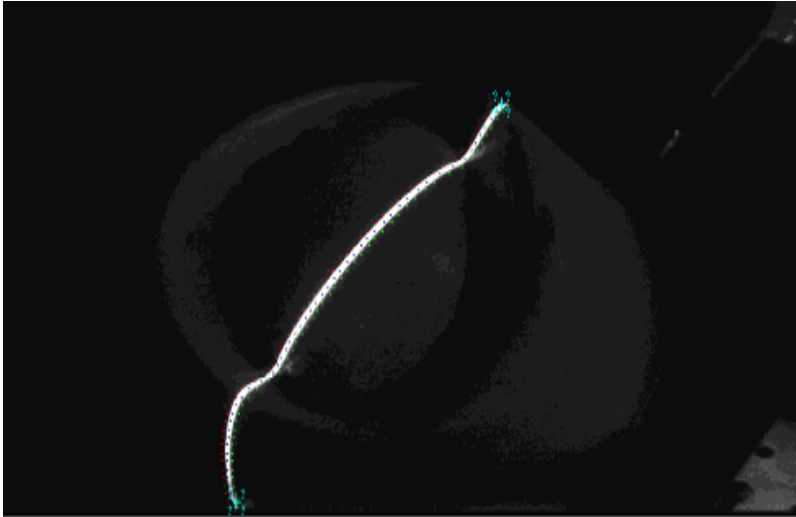
Aktivní triangulace - 1D triangulace

Detekce a klasifikace vozidel

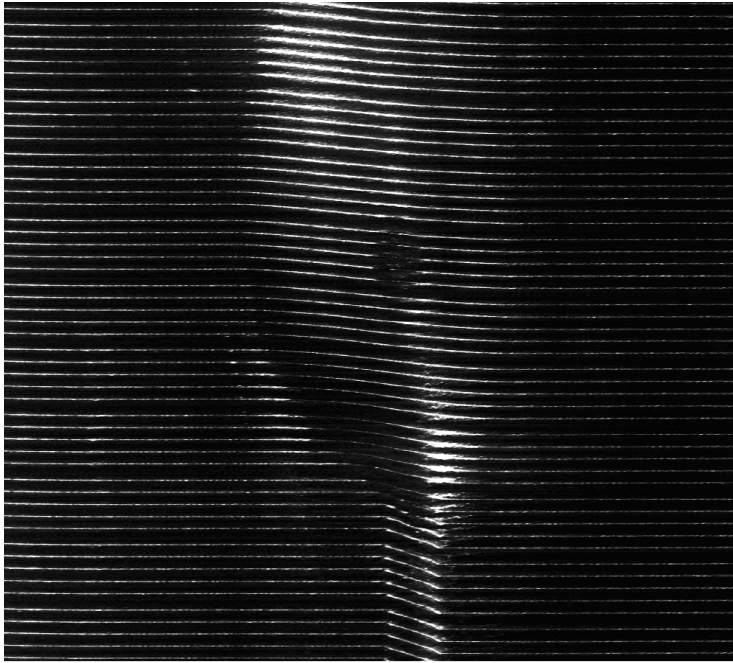
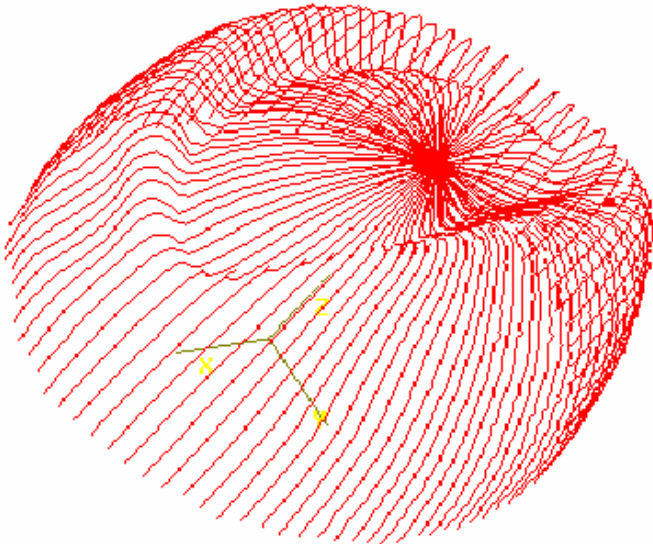
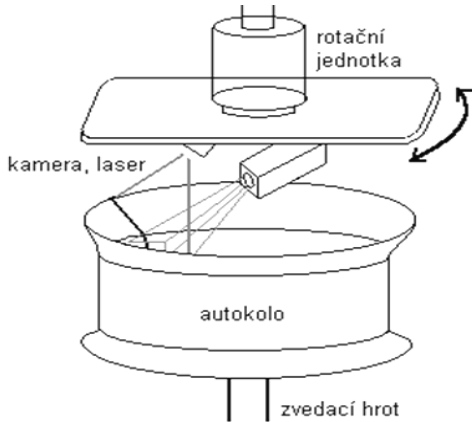


Aktivní triangulace - 2D triangulace

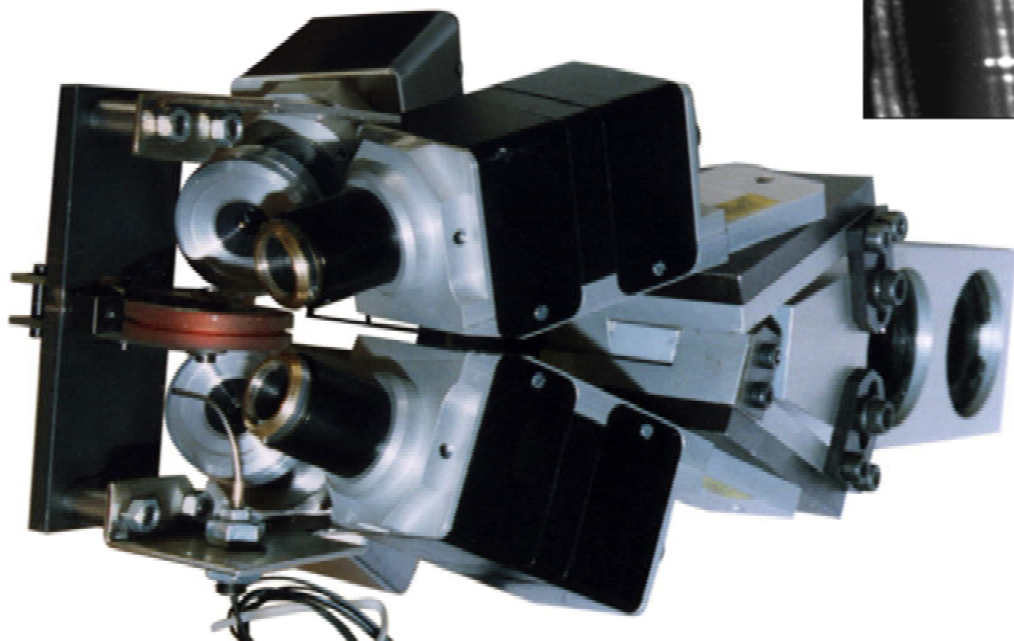
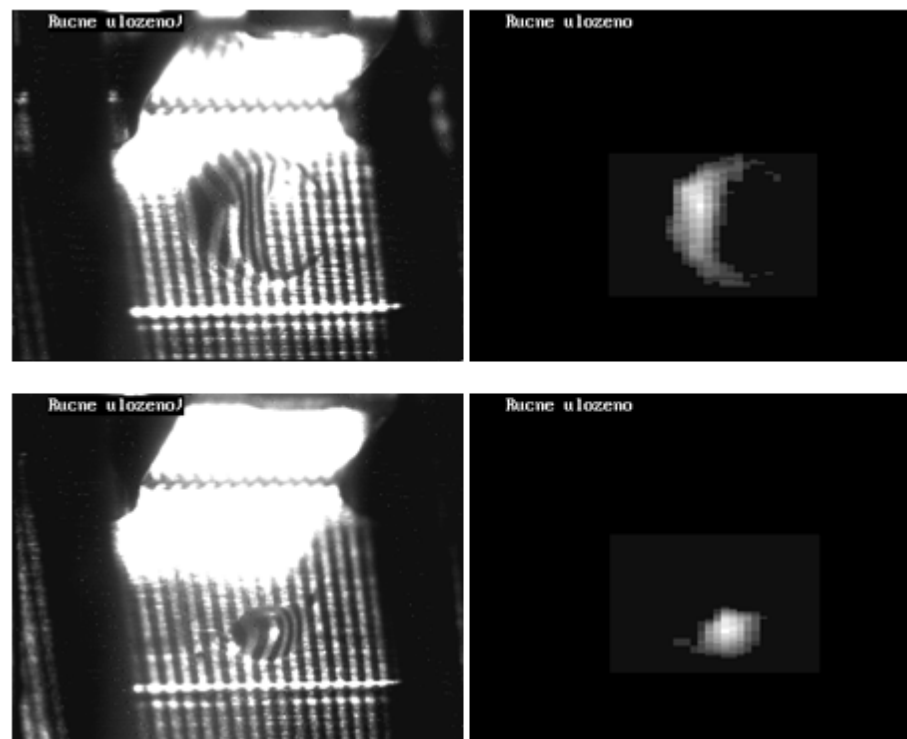
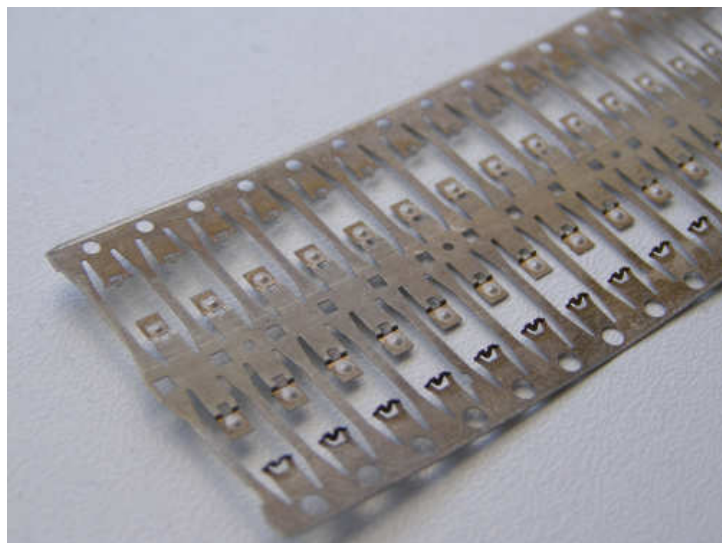
3D model forem klobouků



Kontrola svarů automobilových disků



Aktivní triangulace - 3D triangulace



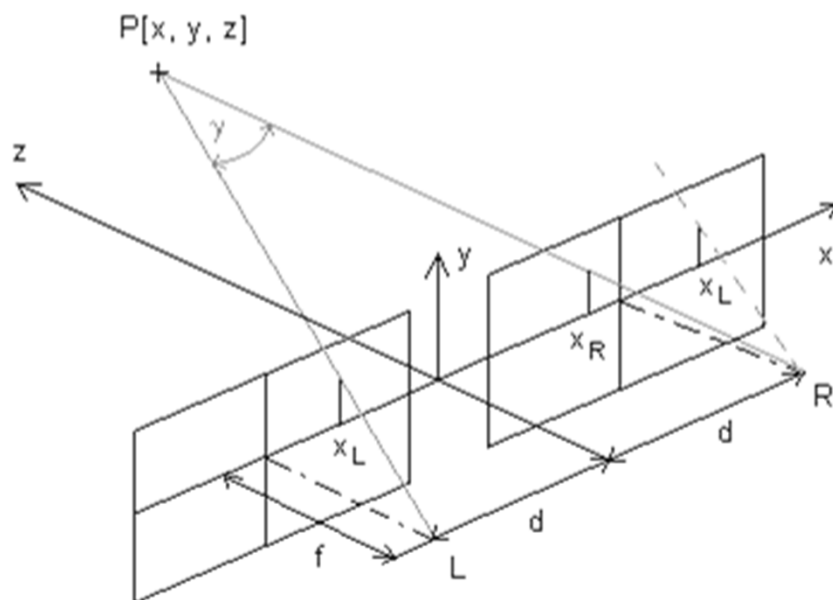
Měření objemu kapky
vodivého lepidla při
výrobě tantalových
kondenzátorů

Pasivní triangulace

- ▶ „*pasivní*“ = není uvažováno geometrické uspořádání osvětlení
- ▶ základem je pořídit minimálně dva snímky (z různého pohledu nebo změněné scény)
- ▶ Používají se tyto základní metody:
 - více kamer (se známou orientací nebo se samokalibrací)
 - jedna kamera v různých polohách
 - jedna kamera a pohybující se objekt - technika „tvar z pohybu“
- ▶ u *dynamických systémů* se často aplikuje více kamer a využívá se znalosti relativních poloh nebo samokalibrujících se metod
- ▶ pro *statické scény* lze použít jedna kamera, která získá snímky ze dvou a více různých pohledů

Pasivní triangulace - stereovidění

- často používaná technika, speciální podskupina *metod s více kamerami*
- dva stereoskopické snímky
- různé varianty obtížnosti - různé parametry snímačů, různá orientace, neznámá vzájemná orientace atd.
- nejjednodušší varianta - optické osy kamer jsou rovnoběžné s osou z souřadnicového systému, ohnisková vzdálenost levé i pravé kamery je stejná a obrazové roviny obou kamer leží v rovině $z = 0$

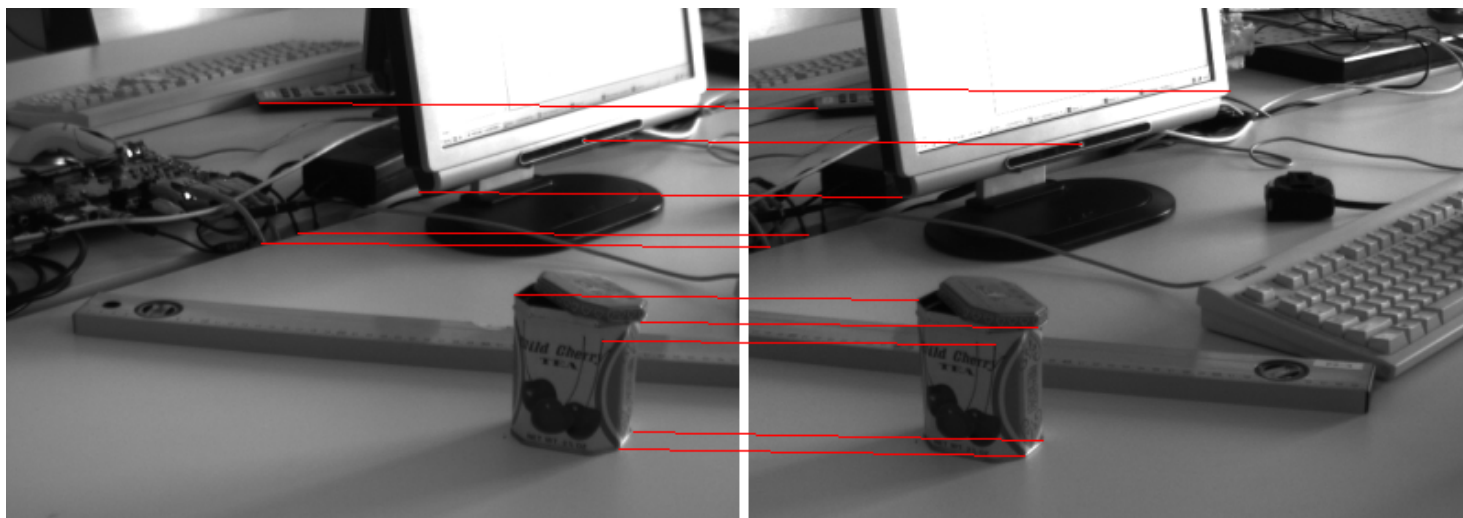


Pasivní triangulace - stereovidění

- ▶ důležitý je úhel, který svírají oba sdružené paprsky, tzv. *úhlová paralaxa* (úhel γ). Pro body bližší pozorovateli je paralaxa větší než pro body vzdálenější. Aby se prostorové vidění náležitě uplatnilo, nesmí její velikost klesnout pod určité minimum.
- ▶ jestliže se nám podaří k bodu P ve snímku z levé kamery najít odpovídající bod v pravém snímku, lze souřadnice x , y , z bodu P určit podle vztahů:

$$x = x_L \frac{2d}{x_L - x_R} \quad y = y_L \frac{2d}{x_L - x_R} \quad z = \frac{2df}{x_L - x_R}$$

- kde $2d$ je vzdálenost mezi optickými osami kamer, f je jejich ohnisková vzdálenost, x_L a x_R jsou souřadnice řešeného bodu v obrazové rovině $z = 0$, rozdíl $x_L - x_R$ se označuje jako *horizontální paralaxa*.



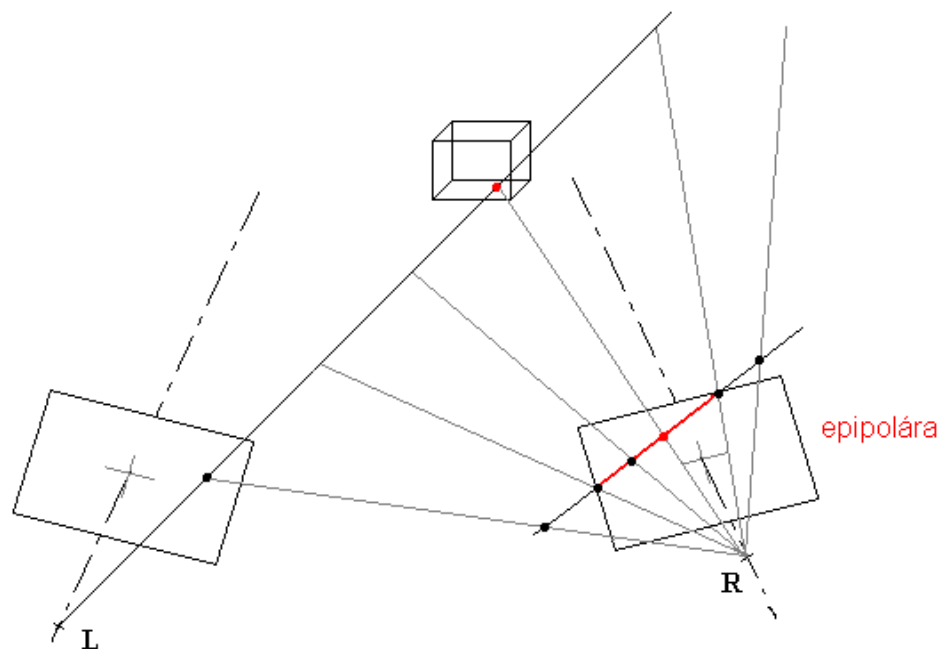
Pasivní triangulace - stereovidění

► **Korespondenční problém** - problém automatického nalezení bodu v obrazech levé i pravé kamery

- je zjednodušen tím, že odpovídající si body musí ležet na *epipoláře* (epipolární linie) -

Je-li určitý bod nalezen na snímku z jedné kamery, leží stejný bod na druhé kameře na úsečce, která vznikne jako průmět myšlené spojnice:

"ohnisko kamery - nalezený bod ve snímku - označený bod na objektu - nekonečno" do obrazové roviny druhé kamery.



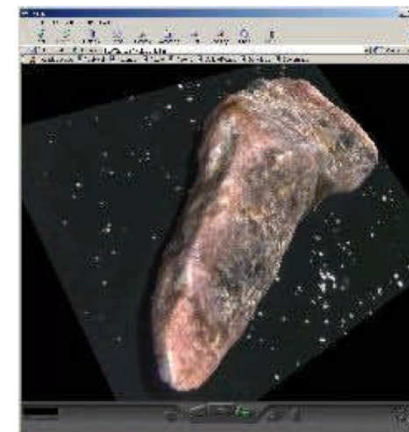
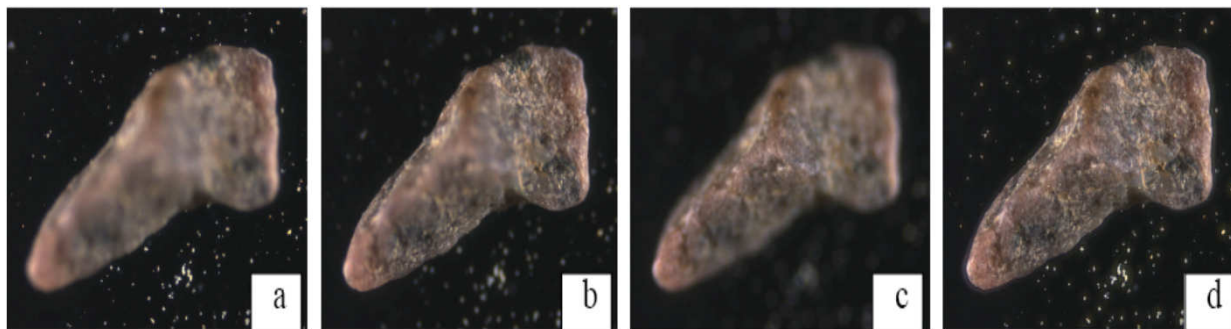
Měřicí systém s teodolitem

- ▶ nejpřesnější triangulační systém schopný měřit s relativní chybou pod 10^{-6} %
- ▶ vysoká přesnost je však splacena dlouhou dobou měření - měřený předmět musí být zaostřen nejméně dvěma teodolity.
- ▶ horizontální a vertikální úhly jsou měřeny elektronicky a 3D souřadnice jsou určeny z měřených úhlů a ze známých pozic teodolitů.
- ▶ moderní systémy jsou vybaveny kvalitním dalekohledem, elektronikou vyhodnocující měření a provádějící některé početní úkony, velkým přehledným displejem. Někdy je integrován 1-D laserový radarový měřič vzdálenosti.
- ▶ používají se pro přesná měření rozměrných objektů (stavebnictví, geodézie, atd.)



Fokusovací techniky

- ▶ důležitými parametry jsou hloubka ostrosti a průměr kroužku vzniklého difrakcí v ohniskové rovině, který závisí na ohniskové vzdálenosti a numerické apertuře
- ▶ Tři různé metody:
 - **Konfokální mikroskopie** - dvojitá prostorová filtrace detekovaného objektu i osvětlení do ohniskové roviny pomocí malého otvoru. Detektor vidí pouze osvětlené body v ohniskové rovině. K získání 3D obrazu nutné skenování ve třech osách (x , y a z) nebo užití většího počtu čoček a maticového CCD senzoru.
 - **Kontrolovaného fokusování** - profily povrchu $Z(x,y)$ získány skenováním xy roviny s pevnou kontrolou Z .
 - **Metoda rozfokusování** - vzdálenost je určena buď z průměru nebo z intenzity difrakčního kroužku. Skenování lze předejít spektrální analýzou za předpokladu, že ohnisková vzdálenost závisí přibližně



Techniky „podoba ze stínování“

- ▶ určení normály povrchových elementů z ozáření, stínů a odlesků na obraze a ze známé pozice kamery a zdrojů světla
- ▶ z normál jsou pak vypočteny 3D tvary
- ▶ techniky je možno ještě rozšířit o zpracování:
 - sekvencí snímků s pohyblivými zdroji světla
 - snímky s různým osvětlením
 - snímky z různých pohledů



Převzato z http://srv-43-200.bv.tu-berlin.de/isprs/wgiii2/tests_datasets.html

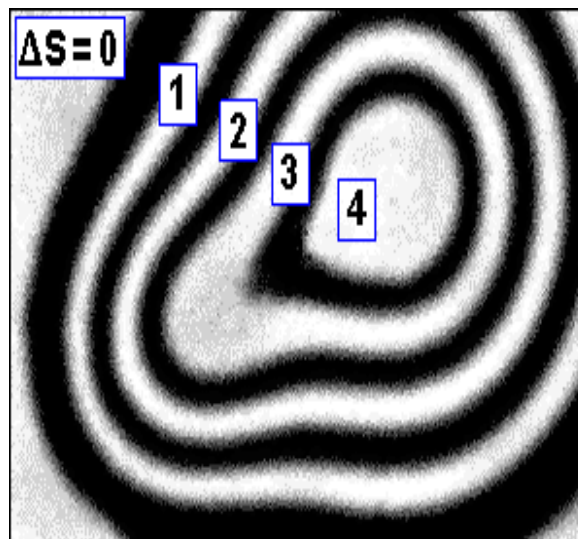
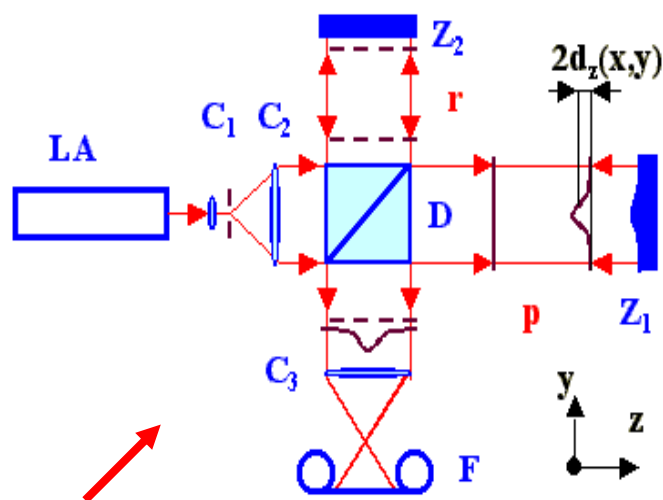
Optická interferometrie

- vlnění je rozděleno na *předmětové a referenční*
- spojí-li se vlna rozptýlená od předmětu s referenční vlnou, mohou spolu *interferovat*. Vznikne tak vlnění, jehož celková intenzita je dána tzv. *interferenční rovnicí*

$$I(x,y) = |I_p(x,y)|^2 + |I_r(x,y)|^2 + 2|I_p(x,y)| \cdot |I_r(x,y)| \cdot \cos(\varphi_p(x,y) - \varphi_r(x,y)),$$

kde $|I_p(x,y)| \cos(\varphi_p(x,y))$ - předmětová vlna, $|I_r(x,y)| \cos(\varphi_r(x,y))$ - referenční vlna,

x a y jsou prostorové souřadnice v rovině interference



$$d_z(x,y) = \Delta S(x,y) \frac{\lambda}{2}$$

kde ΔS je změna interferenčního řádu (bílé proužky)

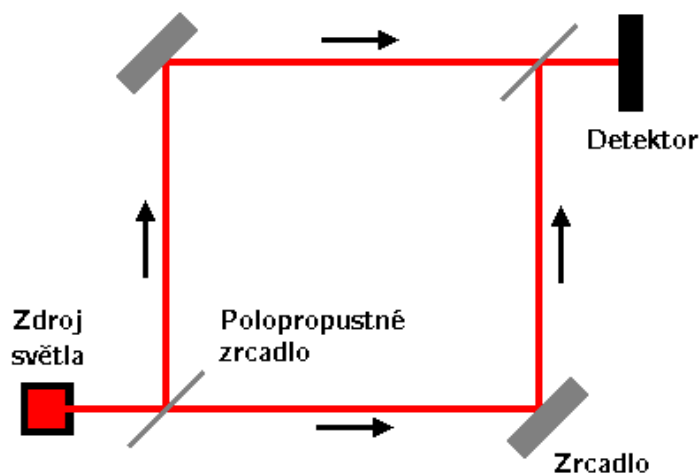
Interferogram

Michelsonův interferometr - LA laser, C čočky, D dělič, Z_1 měřený zrcadlový povrch, Z_2 referenční zrcadlový povrch, F fotoaparát, p předmětový svazek, r referenční svazek, d_z deformace zrcadla Z_1 , $2d_z$ deformace vlnoplochy v předmětovém svazku

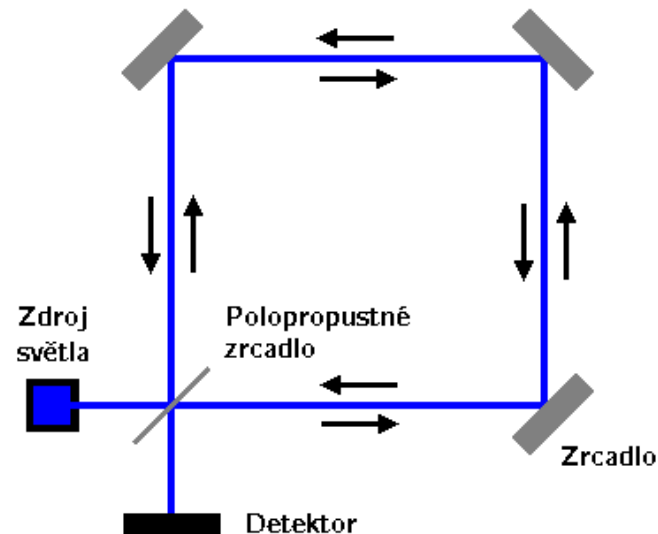
Optická interferometrie

- změna vzdáleností odpovídá *fázovém rozdílu*
- nelze měřit absolutní vzdálenost. *Jednoznačné určení vzdálenosti* objektu můžeme získat jen v rozsahu $\lambda/2$ použitého světla - z interferogramu nelze přímo zjistit, zda interferenční řád směrem od referenčního místa roste či klesá a z toho pak, zda povrch je konkávní, či konvexní.
- nejčastěji se používají *interferometry*: Michelsonův, Sagnacův, Fabry-Peretův, Mach-Zehnderův aj., jenž se liší především ve způsobu rozdělení vlnění na měřené a referenční a podle celkového uspořádání jednotlivých opticko-mechanických prvků

Mach-Zehnderův interferometr



Sagnacův interferometr



Optická interferometrie - techniky

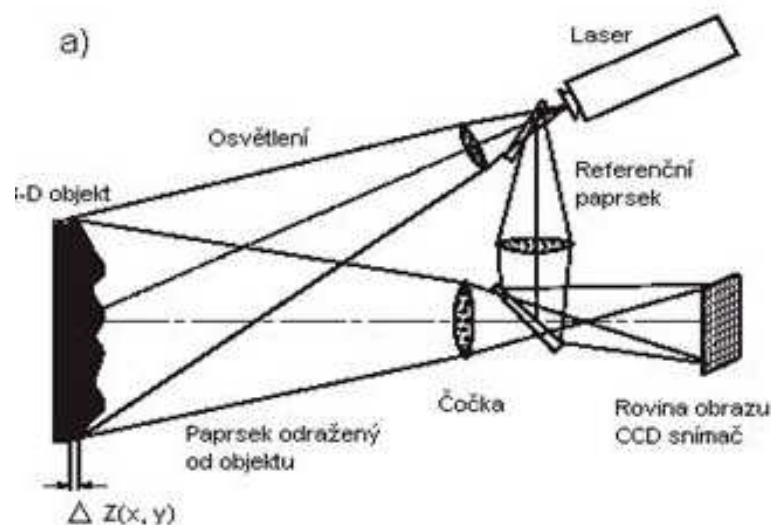
► Nejvýznamnější principy založené na základech optické interferometrie jsou:

2.1 holografická interferometrie

- interferují světelná vlnění pocházející ze dvou různých stavů objektu (např. před a po mechanickém zatížení). Vytvořený interferogram tedy charakterizuje vzniklé namáhání.

2.2 skvrnová (spekl) interferometrie

- skvrny jsou generovány v případě, že koherentní světlo je odraženo od hrubého, nerovného povrchu, kdy odražené vlnoplochy interferují se všemi dalšími. Smícháním s referenčním paprskem vznikne tzv. skvrnový interferogram.



Typické uspořádání při skvrnové interferometrii



Skvrnový interferogram
Převzato z

Optická interferometrie - techniky

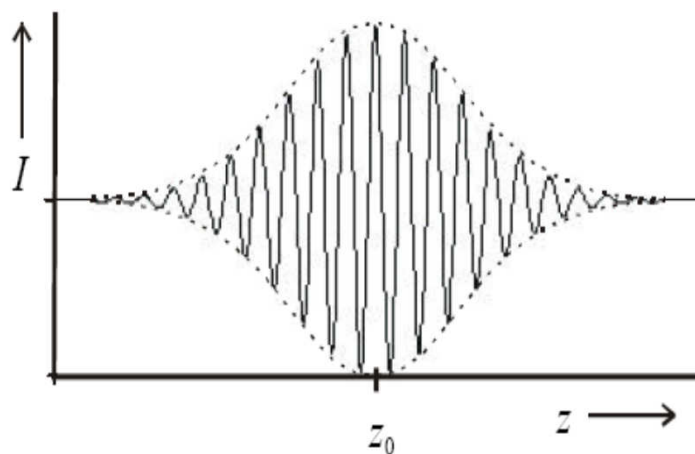
► Nejvýznamnější principy založené na základech optické interferometrie jsou:

2.3 interferometrie pracující s více vlnovými délkami

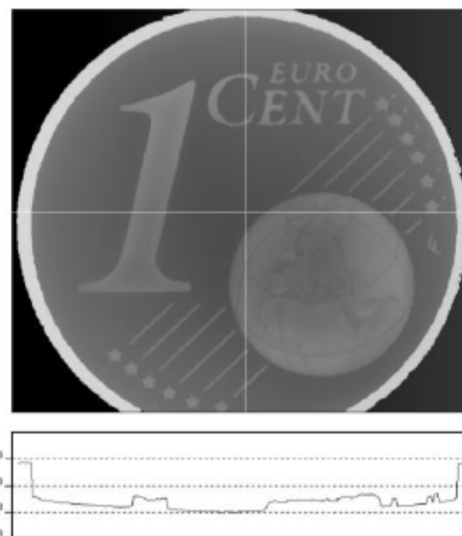
- synteticky vytvořené frekvence vzniklé superpozicí dvou velmi podobných vlnových délek. Takto generované frekvence přímo určují rozsah, ve kterém lze vzdálenosti měřit bez nejednoznačností.

2.4 interferometrie s bílým světlem

- i u zdrojů světla s velkou šířkou pásma lze dosáhnout silného interferenčního efektu (prudké výkyvy signálu se změnou hloubky), měření i s malou aperturou a i na drsných površích



Závislost intenzity světla na pozici předmětového zrcadla (korelogram)



Změřený výškový profil mince (výšková mapa)

Převzato z

Měření doby letu modulovaného světla

- vzdálenost bodu objektu lze stanovit z doby letu τ světelného paprsku od jeho vyslání senzorem, odražení od objektu až po jeho opětovné zachycení senzorem, a to podle vztahu:

$$z = \frac{c}{2} \tau$$

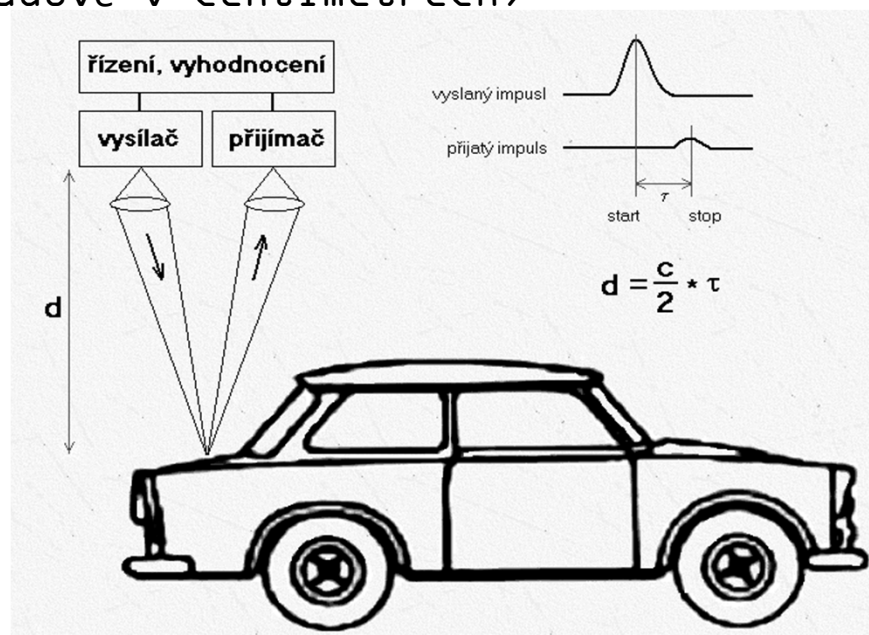
kde d je vzdálenost měřeného bodu,

c rychlost světla

τ doba od vyslání světelného signálu do

jeho přijetí přijímačem

- nevýhody jsou příliš velká rychlost světla ($300 \cdot 10^6$ m/s) - nároky na snímače a vyhodnocovací zařízení, velký útlum signálu, mrtvá doba, nižší přesnost (řádově v centimetrech)



Měření doby letu modulovaného světla

Měření rychlosti projíždějících vozidel

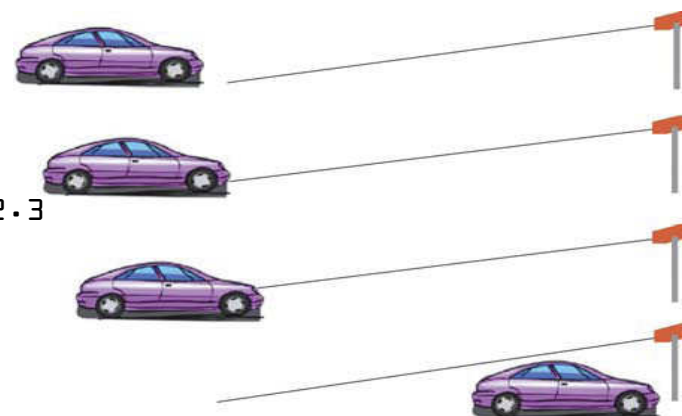


rychlost je derivací vzdálenosti = směrnice



ILM-300-HR

- měřicí frekvence 1 kHz
- rozsah 2-300 m
- vlnová délka 905 nm
- divergence paprsku 3.0 x 2.3
- rozlišení 10 cm
- přesnost 30 cm



Optické 3D měření

Ilona Kalová

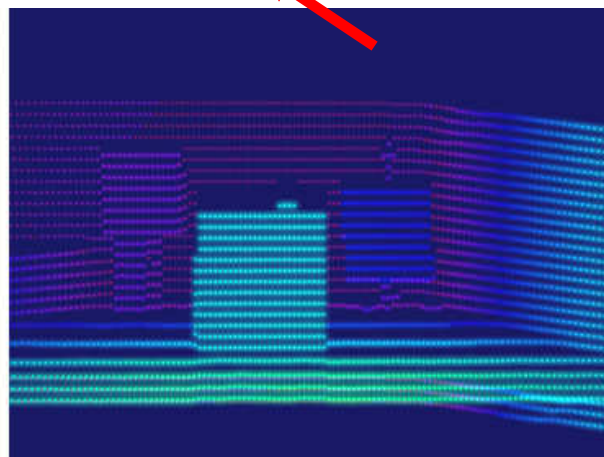
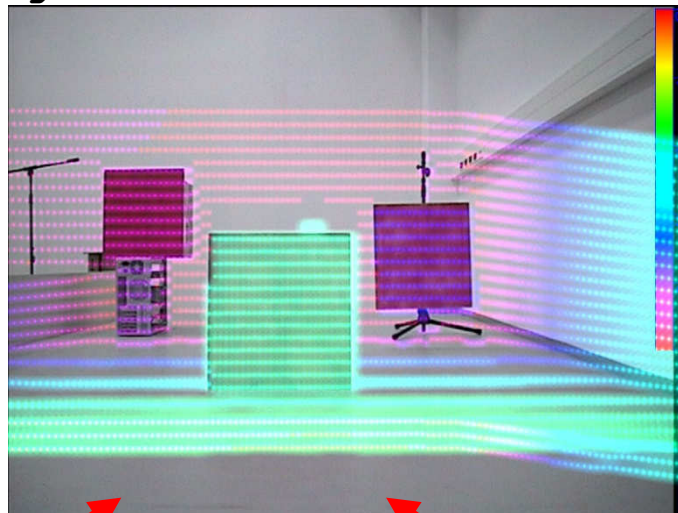


Rozvrh přednášky:

1. Metody 3D rekonstrukce.
2. Orientace v prostoru.
3. Reprezentace těles.
4. Geometrické transformace ve 3D.

Orientace v prostoru

- údaje získané z 3D optických systémů lze analogicky použít také pro měření okolí
- aplikace typu: navádění mobilních robotů, 3D lokalizace, automatická tvorba 3D map, navigace atd.



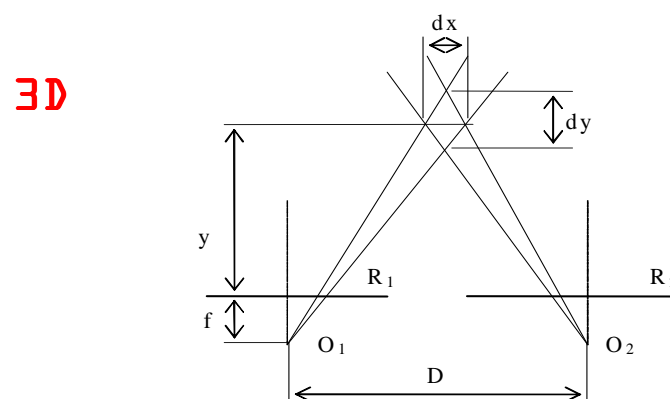
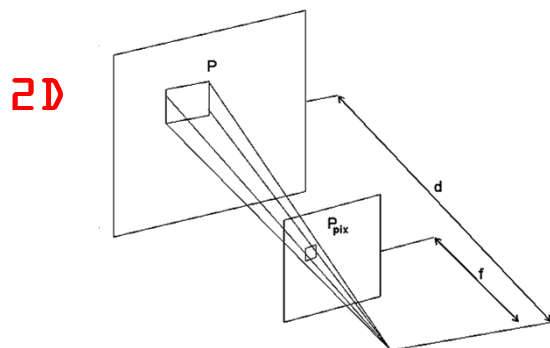
Orientace v prostoru

- ▶ dalším typem aplikací jsou manipulační a výrobní stroje - montáž, obrábění, svařování, inspekce - robotická ruka
- ▶ výhody: přesné polohování na pozici v tolerančním pásu, reakce na změnu polohy, zamezení náhodné kolizi, práce s neuspořádanými, neorientovanými tvary

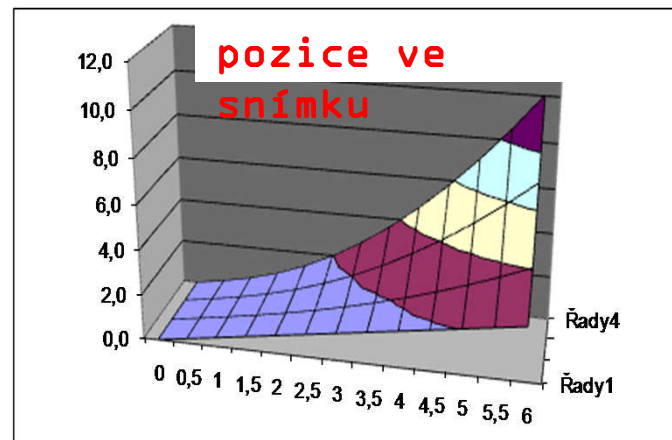
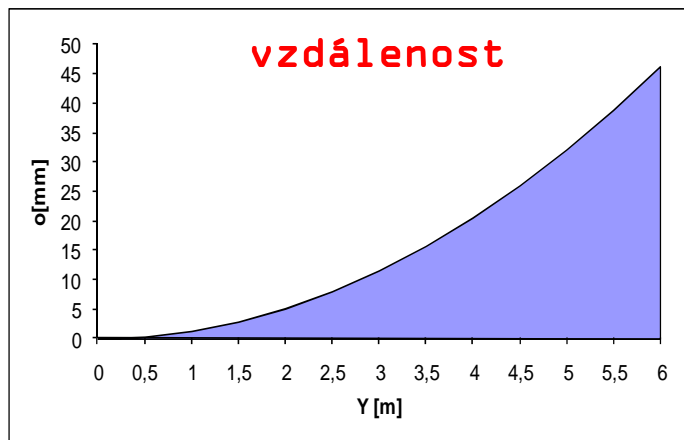


Chyba diskretizace

- hrana nebo body se promítnou do jednoho pixelu (fotocitlivý prvek na čipu kamery má vždy určitou velikost a všechny body, které se promítnou do tohoto místa budou v obraze reprezentovány pouze jedním pixelem)



- chyba roste se vzdáleností od roviny čipu a od optického středu snímku - dx , dy , dz závisí na velikosti pixelu, f , D , y , i x , z .



Optické 3D měření

Ilona Kalová



Rozvrh přednášky:

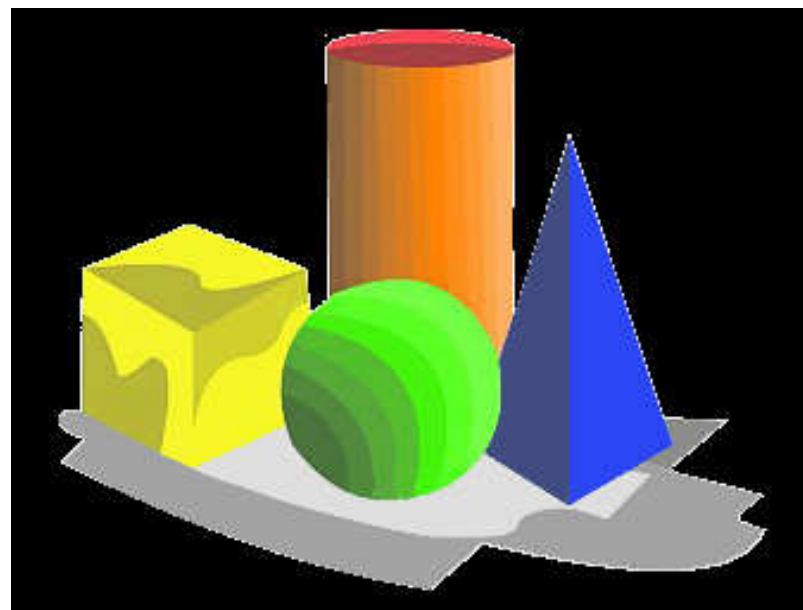
1. Metody 3D rekonstrukce.
2. Orientace v prostoru.
- 3. Reprezentace těles.**
4. Geometrické transformace ve 3D.

Reprezentace těles

- těleso je chápáno jako spojitý útvar, tvořený jedním celkem (i s možnými otvory) a je představováno množinou bodů, splňující určitá kritéria
- těleso je sjednocením dvou navzájem disjunktních množin - množiny vnitřních bodů a množiny hraničních bodů. Výše popsané metody rekonstrukce zjišťují hraniční body, proto se pro ně používá nejčastěji tzv. hraniční reprezentace.

- Způsoby reprezentace:

1. hraniční reprezentace těles
2. objemová reprezentace
3. šablonování
4. konstruktivní geometrie těles



Hraniční reprezentace těles

- je výhodná z hlediska dalšího zpracování - její zobrazování se snadno provádí v grafických akcelerátorech
- spočívá v popisu povrchu (množiny hraničních bodů)
- dovoluje popsat i takové objekty, které nelze ve skutečném světě vyrobit, tzv. *nonmanifolds* (nekonečně tenká přímka, dotek dvou objektů pouze v jednom bodě atd.). Pojem *manifold* („vyrobitelný“) se pak používá pro modely těles, které odpovídají nějakému skutečnému tělesu.
- hraniční reprezentace je převedena na popis *vrcholů* (vertex), *hran* (edge) a *ploch* (face) tvořících hranici (plášť) tělesa
- geometrické prvky, ze kterých je sestavena hraniční reprezentace tělesa, jsou uspořádány do hierarchických struktur
- hrany (resp. plošky) nemusí být jen úsečky, ale mohou to být *obecné křivky* - nejčastěji kubiky (křivky třetího řádu) - používají se např.: Bézierovy, B-spline, NURBS atd. křivky (resp. plochy)

Hraniční reprezentace těles

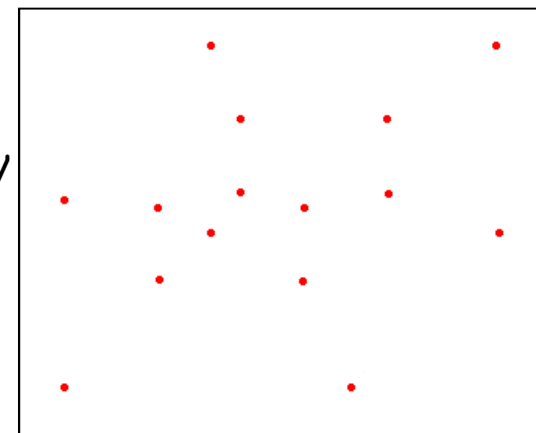
- ▶ kvalitní reprezentace (především 1.4) musí přímo obsahovat následující informace nebo je musí být možné z ní snadno odvodit:
 - *klasifikace hran na ostré a pomocné* (pomocné hrany nejčastěji tvoří spojnice mezi aproximujícími ploškami) - není-li přímo obsažena v reprezentaci, je třeba znát, které plochy s hranou incidují
 - *normály ve vrcholech* - jednotkové vektory kolmé na těleso ve vrcholech jsou důležité hlavně pro zobrazení (řešení viditelnosti a osvětlení ploch)
 - *ohraničení plochy* - je třeba umět nalézt všechny hrany dané plochy
 - *poloha bodu v prostoru* - pro libovolný bod je třeba umět stanovit, zda leží uvnitř či vně tělesa

- ▶ Techniky hraniční reprezentace:
 - 1.1 vrcholová reprezentace
 - 1.2 hranová reprezentace
 - 1.3 jednoduchá plošková reprezentace
 - 1.4 strukturovaná plošková reprezentace

Hraniční reprezentace těles

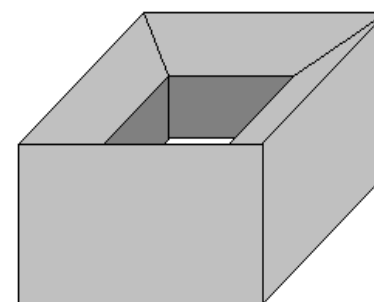
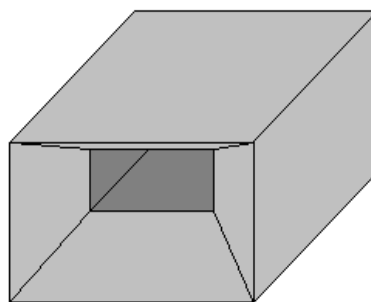
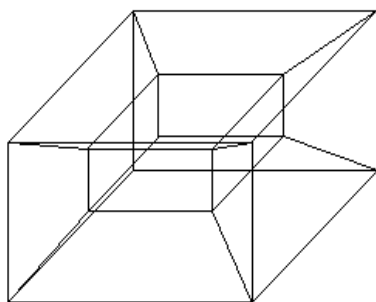
1.1 vrcholová reprezentace

- nejjednodušší, nejčastější výsledek měření
- Implementace - spočívá v popisu pouze vrcholy
- nejednoznačná, nejméně názorná



1.2 hranová reprezentace

- spočívá v zápisu hran a vrcholů
- připomíná prostorové drátové modely těles, proto se někdy nazývá *drátový model* (wire-frame)
- Implementace - seznam vrcholů (souřadnice) + seznam hran (obsahuje dva ukazatele do seznamu vrcholů)
- nejednoznačná - jeden model může reprezentovat několik různých těles



Hraniční reprezentace těles

1.3 jednoduchá plošková reprezentace

- rozšíření hranové reprezentace na plochy
- jednoznačná reprezentace

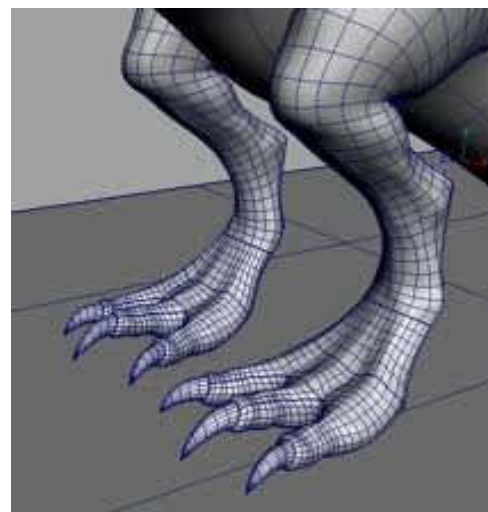
Implementace - seznam vrcholů + datová struktura určená pro popis ploch (v praxi nastávají tyto případy):

- plochy tvoří pravidelnou síť (mesh) - dvojrozměrné pole ukazatelů do seznamu vrcholů - zobrazení ve 2D jako *výšková (hloubková) mapa*
- všechny plochy mají stejný počet vrcholů (nejčastěji tři nebo čtyři) - seznam, jehož každý člen je tvořen trojicí či čtveřicí ukazatelů na vrcholy
- plochy mají různé uspořádání a velikost - seznam ploch má nestejně dlouhé položky, každá bude obsahovat různý počet ukazatelů na vrcholy



Výšková mapa
kapky
vodivého
lepidla

Model tvořený
plochami vždy
se čtyřmi
vrcholy



Hraniční reprezentace těles

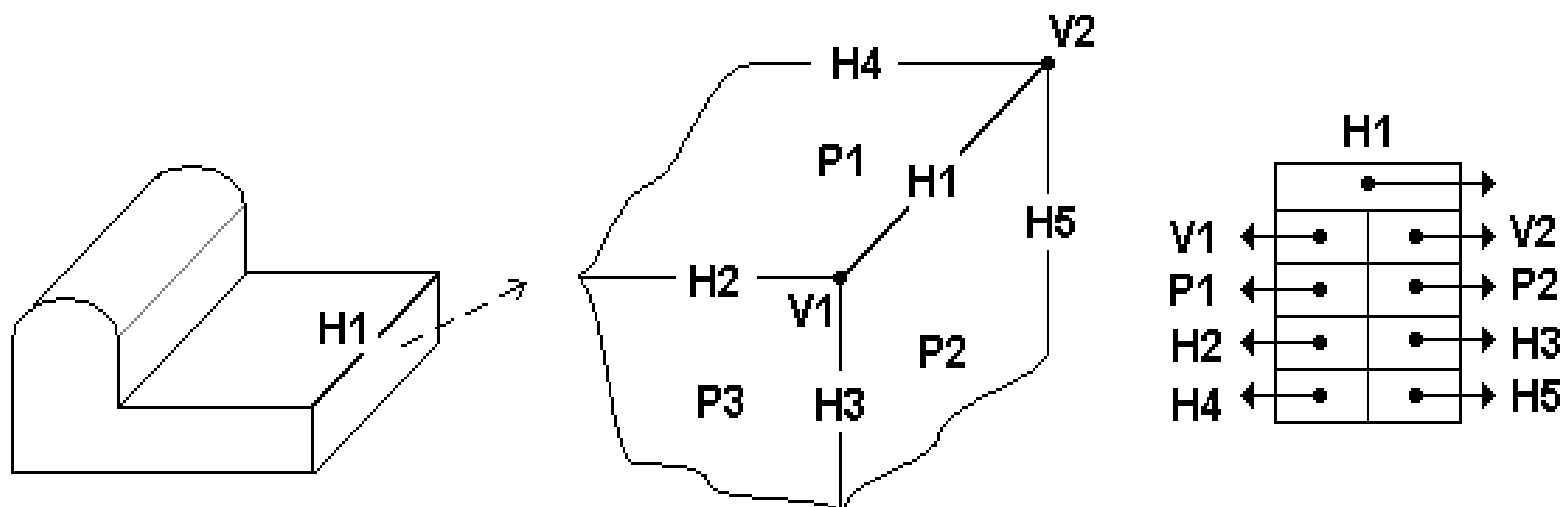
1.4 strukturovaná plošková reprezentace

- komplexní reprezentace

Implementace - je tvořena třemi seznamy v hierarchickém uspořádání - seznam vrcholů, seznam hran a seznam ploch. Seznamy mohou být cyklicky zřetězené.

- nejvíce informací nesou prvky seznamu hran - ukazatelé na všechny geometrické elementy (plochy, hrany, vrcholy) s nimiž hrana inciduje - *okřídlená hrana* (winged-edge).

- pro nonmanifolds se používá odvozená struktura *půlhrana* - dvojice stěna a hrana. Běžné hrany se zapíší jako dvojice půlhran.



Objemová reprezentace

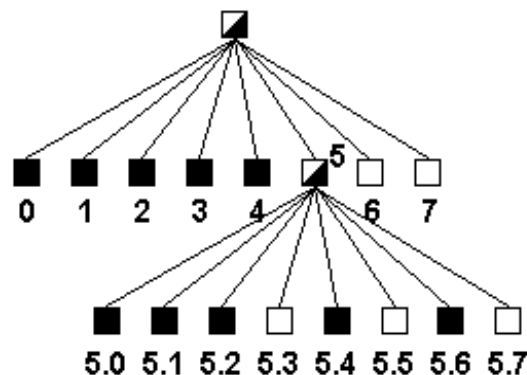
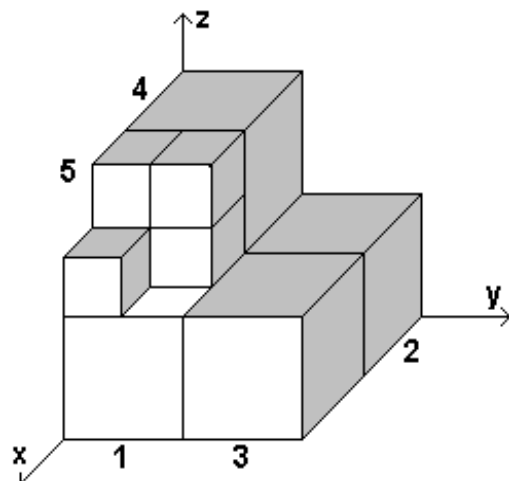
► výčet části prostoru, ve kterých se objekt nachází

► 2.1 vyčíslení obsazenosti prostoru

- 3D prostor je reprezentován trojrozměrným polem elementárních objemových jednotek, které nabývají dvoustavové hodnoty - obsazené nebo prázdné. Pro jejich označení se vžil pojem *voxel* (zkratka z volume element) - obdoba pixelu ve 2D, tvar krychle či kváдру

► 2.2 oktalové stromy

- na paměť je úspornější varianta, která adaptivně rekurzivním způsobem postupně zjemňuje 3D prostor. Popis objektu je pak tvořen kombinací objemů nestejně velikosti (kostičky). Rekurzivní definice objektu je zapisována formou *oktalového stromu* (octree); oktalový - prostor je vždy dělen na osm stejných menších částí



(FFFFFF(FFFVVFV)V)

nebo

MFFFFFFMFFFVVFV

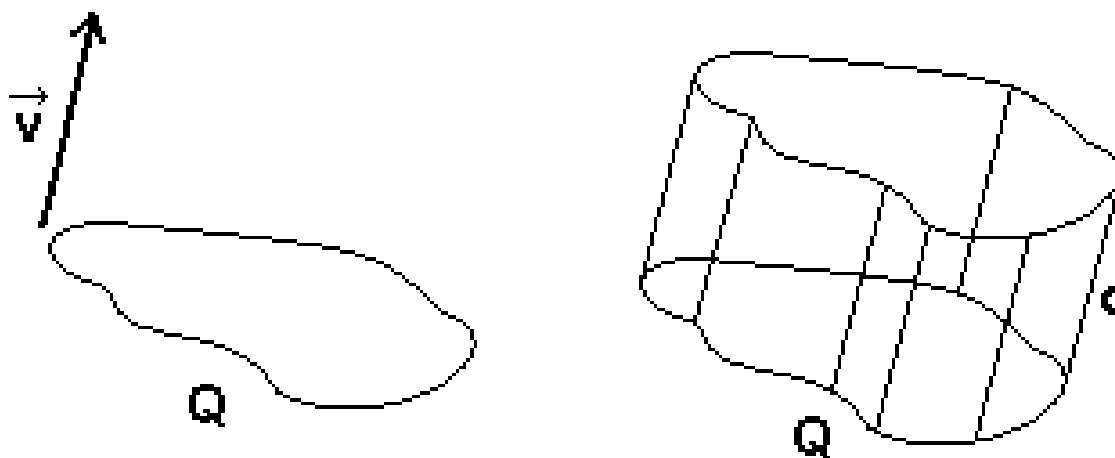
V - prázdný

F - plný

M - smíšený

Šablonování

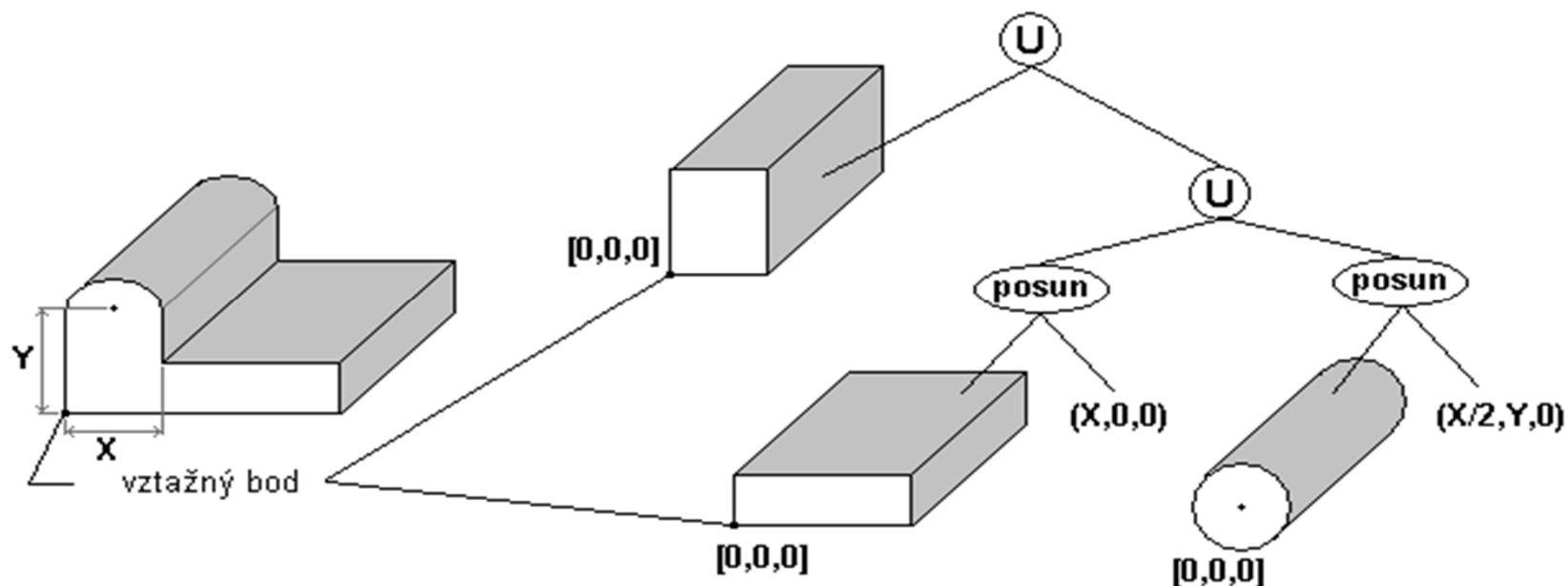
- Šablonování (sweeping) je modelovací technika, při které získáváme plochu tažením dvojrozměrného obrysu (tzv. profilu) po trojrozměrné křivce (tzv. páteři)
- **techniky šablonování:**
 - translační šablonování - obrys je libovolný, páteř je úsečka, např. válcová nebo hranolová plocha
 - rotační šablonování - obrys je libovolný, obrys je tažen po kružnici (rotace kolem osy)
 - obecné šablonování - obrys i trajektorie je libovolná



Těleso získané vytažením z profilové křivky $q(u)$ ve \vec{v} směru vektoru \vec{v} o vzdálenost d

Konstruktivní geometrie těles (CSG)

- ▶ CSG (*Constructive Solid Geometry*) odráží postupy používané konstruktéry při tvorbě těles
- ▶ stromová struktura uchovávající historii dílčích konstrukčních kroků
- ▶ z tzv. *CSG primitiv* (konečná množina jednoduchých 3D těles - kvádr, koule, válec, kužel, poloprostor, toroid atd.) je s pomocí množinových operací (průnik, sjednocení, rozdíl atd.) a prostorových transformací (posunutí, otočení, zvětšení atd.) vytvořen výsledný objekt.
- ▶ listy stromu jsou jednotlivá základní tělesa a souřadnice a hrany mezi uzly odpovídají množinovým operacím nebo prostorovým transformacím



Optické 3D měření

Ilona Kalová



Rozvrh přednášky:

1. Metody 3D rekonstrukce.
2. Orientace v prostoru.
3. Reprezentace těles.
4. Geometrické transformace ve 3D.

Geometrické transformace ve 3D

- jedny z nejčastěji používaných operací v počítačové grafice
- lze je aplikovat na jednotlivé body objektu nebo lze transformovat souřadný systém
- **Dělení:**
 - *lineární* - otočení, posunutí, změna měřítka atd. (přímé čáry zůstávají přímé, rovnoběžky zůstávají rovnoběžkami, velikost úhlu je zachována)
 - *projekce* - převod z vícerozměrného prostoru do prostoru o méně rozměrech (přímky zůstávají přímkami, rovnoběžky se mění v různoběžky)
 - *nelineární* - afinní (např. zkosení - mění se úhly), polynomické atd., př. warping
- **Homogenní souřadnice**
 - umožňují vyjádření nejčastěji používaných transformací pomocí matic
 - bod P s kartézskými souřadnicemi $[[X, Y, Z]]$ zapíšeme pomocí pravoúhlých homogenních souřadnic $[[x, y, z, w]]$, pro které platí:

$$X = \frac{x}{w}, \quad Y = \frac{y}{w}, \quad Z = \frac{z}{w}, \quad w \neq 0$$

kde w se nazývá váha bodu nebo *homogenizační faktor* a často se volí $w = 1$

Geometrické transformace ve 3D

- **Transformace** A bodu $P = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ w]$ na bod $P' = [x'_1 \ y'_1 \ z'_1 \ w']$ má tvar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

a převod se zapíše:

$$P' = [x' \ y' \ z' \ w'] = PA = [x \ y \ z \ w] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

► Skládání transformací

- je realizováno jako násobení matic
- záleží na pořadí, v jakém se operace provádí (je rozdíl, jestli objekt posuneme a pak otočíme okolo počátku souřadného systému, nebo zda objekt nejdříve otočíme a poté posuneme)
- výslednou matici A reprezentující postupné provádění operací A_1 , A_2 a A_3 (v tomto pořadí) určíme:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

- *inverzní transformace* je reprezentována inverzní maticí

Posunutí (translace)

- posunutí bodu P je určeno vektorem posunutí

$$\vec{p} = (X_T, Y_T, Z_T) = (X' - X, Y' - Y, Z' - Z)$$

- aplikací této transformace na bod P získáme bod P' o souřadnicích

$$X' = X + X_T$$

$$Y' = Y + Y_T$$

$$Z' = Z + Z_T$$

- v transformační matici se uplatní pouze poslední řádek a prvky na diagonále

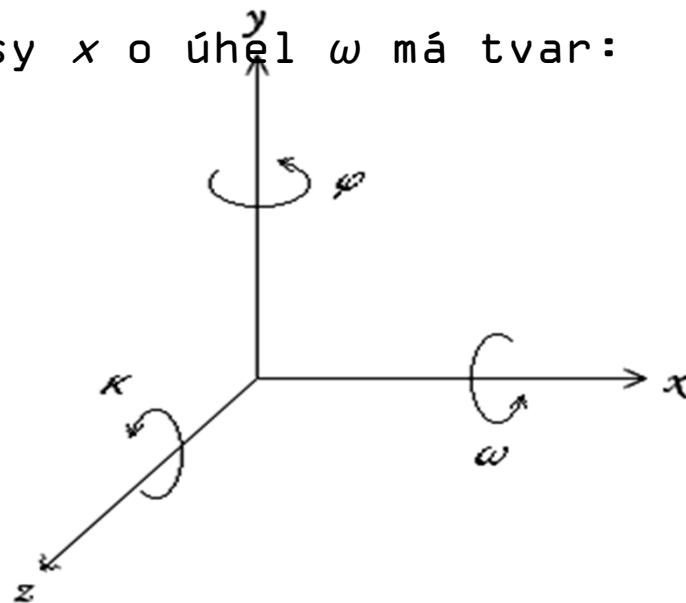
$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ X_T & Y_T & Z_T & 1 \end{bmatrix}$$

Otočení (rotace)

- otáčení ve 3D lze realizovat jako postupné otáčení kolem jednotlivých os

- matice reprezentující otáčení kolem osy x o úhel ω má tvar:

$$A_{Rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- analogicky matice pro otočení kolem osy y a z

$$A_{Ry} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{Rz} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otočení (rotace)

- současné otáčení o úhly ω , φ , κ kolem os x , y , z lze realizovat jako násobení matic pro otočení kolem jednotlivých os nebo jednou maticí (vzniklou vynásobením):

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \kappa & \cos \varphi \cdot \sin \kappa & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \kappa - \cos \omega \cdot \sin \kappa & \sin \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \kappa + \cos \omega \cdot \cos \kappa & \sin \omega \cdot \cos \varphi & 0 \\ \cos \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \kappa + \sin \omega \cdot \sin \kappa & \cos \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \kappa - \sin \omega \cdot \cos \kappa & \cos \omega \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- otočení kolem libovolného bodu $R = [x_R, y_R, z_R]$ v prostoru se realizuje jako složení transformací:

- posunu celého objektu o vektor (x_R, y_R, z_R)
- otočení
- inverzní transformací posunu

Výsledná matice je součinem

$$A = A_T \cdot A_R \cdot A_T^{-1}$$

Změna měřítka (scale)

- změna měřítka v prostoru se provede transformační maticí:

$$A_S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- v níž koeficienty S_x , S_y , S_z určují změnu ve směru příslušné souřadnicové osy
 - pro koeficienty $S < 1$ jde o *zmenšení*
 - pro $S > 1$ *zvětšení*

Souměrnost

► souměrnosti můžeme rozdělit do tří skupin:

- souměrnost podle roviny
- osová souměrnost
- středová souměrnost

► všechny tyto souměrnosti lze realizovat transformací změny měřítka s koeficienty S uvedenými v tabulce

	S_x	S_y	S_z
souměrnost podle roviny xy	1	1	-1
souměrnost podle roviny xz	1	-1	1
souměrnost podle roviny yz	-1	1	1
souměrnost podle osy x	1	-1	-1
souměrnost podle osy y	-1	1	-1
souměrnost podle osy z	-1	-1	1
středová souměrnost	-1	-1	-1

$$A_S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

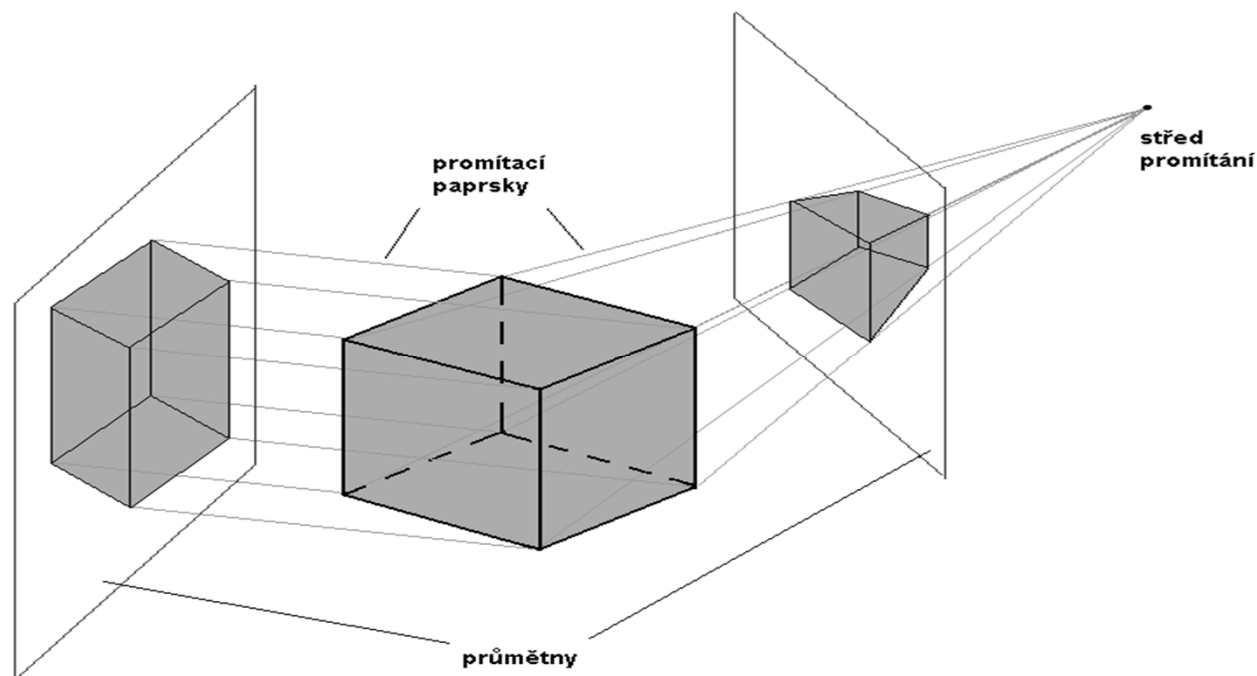
Zkosení (shear)

- operaci zkosení ve třech směrech opět rozdělíme na tři případy zkosení ve směru jednotlivých rovin yz , xz a xy
- ve všech třech případech určují koeficienty H_x , H_y a H_z míru zkosení v odpovídajícím směru

$$A_{Hyz} = \begin{bmatrix} 1 & H_y & H_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{Hxz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ H_x & 1 & H_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{Hxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ H_x & H_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Promítání

- realizuje převedení trojrozměrných objektů do dvojrozměrné podoby - dochází ke ztrátě informace
- *prostorový paprsek* - přímka vedená promítaným bodem, jejíž směr závisí na zvolené metodě promítání
- *průmětna* - plocha v prostoru, na kterou dopadají promítací paprsky a v místě dopadu vytvářejí *průmět*



Objekt a jeho průměty sestrojené rovnoběžným (vlevo) a středovým (vpravo) promítáním

Rovnoběžné promítání

- všechny promítací paprsky jsou rovnoběžné, vzdálenost průmětny od promítaných objektů neovlivňuje velikost průmětů
- podle toho jaký úhel svírají paprsky s průmětnou, dělíme rovnoběžné promítání na
 - *pravoúhlé* (pro úhel 90 °)
 - *kosoúhlé* (pro ostatní úhly, nejčastěji 45 °)
- rovnoběžné promítání do roviny xy kolmými paprsky popsanými vektorem $(0, 0, -1)$ představuje jednoduše zanedbání souřadnice z promítaných bodů:

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- takto získaný průmět představuje půdorys
- pro získání pohledu z jiného směru nejprve nalezneme transformaci, která objekty posune a otočí do vhodné promítací polohy nad průmětnou xy a pak provedeme operaci promítání

Středové (perspektivní) promítání

- ▶ všechny promítací paprsky vychází z jednoho bodu, který se nazývá *střed promítání*
- ▶ obecně není zachována rovnoběžnost; vzdálenost objektů od středu promítání ovlivňuje velikost jejich průmětů (vzdálenější objekty mají menší průměty)
- ▶ střed promítání se většinou volí na ose z (bod $S = [0, 0, d]$); průmětnou je rovina xy
- ▶ bod P o souřadnicích $[x, y, z]$ se promítne do roviny xy do bodu P' o souřadnicích:

$$[x', y'] = \left[x \frac{d}{d-z}, y \frac{d}{d-z} \right] = \left[x \frac{1}{1-z/d}, y \frac{1}{1-z/d} \right]$$

- ▶ maticově lze středové promítání popsat:

$$[x', y', z', w'] = [x, y, z, w] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Středové (perspektivní) promítání

- rozlišujeme tři případy odpovídající orientaci průmětny vůči osám souřadnicového systému:
 - jednobodová perspektiva - průmětna protíná jedinou souřadnicovou osu
 - dvoubodová perspektiva - průmětna protíná dvě souřadnicové osy

